nekanika eknik 2

atika dan kegunaannya

Heinz Frick

AN DAERAH
MUR
2
1

532
Fri
m

MEKANIKA TEKNIK 2

STATIKA & KEGUNAANNYA

BALOK TERUSAN
KONSTRUKSI PORTAL STATIS TIDAK TERTENTU
PERUBAHAN BENTUK ELASTIS
GARIS PENGARUH

PERBAIKAN
BUKU RUSAK
TH. 1997 / 1998

Ir. HEINZ FRICK

PENERBIT KANISIUS

Mekanika Teknik – Statika dan Kegunaannya 2
028018
© Kanisius 1979

PENERBIT KANISIUS (Anggota IKAPI)
Jl. Cempaka 9, Deresan, Yogyakarta 55281
Telepon (0274) 88783, Teleks 25243, Fax (0274) 63349
Kotak Pos 1125/Yk, Yogyakarta 55011

Cetakan pertama 1979
Cetakan kedua 1981
Cetakan ketiga 1982
Cetakan keempat 1984
Cetakan kelima 1985
Cetakan keenam 1988
Cetakan ketujuh 1990
Cetakan kedelapan 1991
Cetakan kesembilan 1992

MILIK
PERPUSTAKAAN DAERAH
JAWA TIMUR
Nomor : 68.020 /PD/ P /1994
Tanggal : 26/5 1997

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994

ISBN 979-413-345-0

Hak Cipta dilindungi Undang-undang.
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apa pun, termasuk fotokopi, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Dicetak oleh Percetakan Kanisius Yogyakarta

Kata pengantar

Jilid kedua buku Ilmu mekanika teknik — statika dan kegunaannya ini mencakup sebuah Pengantar ke dalam Metode perhitungan sistim statis tidak tertentu dan sebuah bab tentang garis pengaruh. Lampirannya dengan jumlah tabel-tabel yang cukup luas juga dapat mengisi kekosongan dalam bidang ini di pasaran buku statika. Di samping itu tabel-tabel itu akan berguna sekali dalam praktek. Buku ini ditutup dengan daftar kependekan, daftar istilah penting dan pustaka.

Atas dasar kenyataan, bahwa di Indonesia nilai ukuran-ukuran seperti kg, kg/cm2, t, tm dsb. masih berlaku, maka tidak digunakan nilai ukuran-ukuran yang baru seperti N (Newton), KN (Kilonewton) dan MN (Meganewton). Untuk kebutuhan konversi dapat digunakan petunjuk berikut:

Gaya-gaya : dasarnya ialah kN (kilonewton) = 1'000 N = 0.001 MN
Beban : kN/m dan kN/m2
Momen : kNm
Tegangan : N/mm2

Dasar-dadar Newton dihasilkan dari Fisika, yang menentukan kecepatan jatuh g = 9.80665 m/s2. Dialihkan dalam bidang pembangunan, yang menghitung dengan faktor keamanan yang besar, maka g = 10.0 m/s2 boleh dikatakan cukup teliti.

Untuk konversi dapat dikatakan, bahwa:

1kg = 1kp = 10 N

atau 1t = 1Mp = 10kN = 0.01 MN dsb.

Ucapan banyak terima kasih saya sampaikan pertama-tama kepada VEB-Verlag für Bauwesen di Berlin, Jerman Timur, yang telah menyerahkan dengan cuma-cuma copyright bab 8. (Perubahan bentuk elastis) dan 9. (Garis pengaruh), serta B.G. Teubner Verlag di Stuttgart, Jerman Barat. Kemudian pengajar statika saya, Ir. Adam Magyar di Zürich, Swis, yang telah memperkenalkan kepada saya rahasia-rahasia statika pada tahun 1962-65, Wakil Pimpinan Pendidikan Industri Kayu Atas (PIKA) Semarang, Sdr. I. Susmadi, sebagai korektor bahasa Indonesia dan Ir. Mlodzik dari Biro Insinyur Fietz + Leuthold AG di Zürich, Swis, yang telah menyediakan diri meneliti semua rumus dan menghitung kembali contoh-contoh.

Perlu ditambahkan di sini, bahwa baik dalam pemelihan bahan maupun dalam susunan kepustakaan diusahakan selengkap mungkin. Semoga buku ini akan bermanfaat sekali bagi para mahasiswa dan para arsitek dalam praktek dan mendapatkan sambutan seperti yang saya harapkan dan yang memberikan kekuatan kepada saya untuk menyelesaikan tugas ini. Kebahagiaan akan memenuhi hati saya menerima imbalan jasa itu.

FUMIGASI
T. A.
1997 / 1998

Kami menantikan saran dan usul ke arah perbaikan, yang pasti akan timbul setelah penggunaan buku ini, dengan tangan terbuka dan senang hati. Terbitan pertama ini dimungkinkan oleh subsidi yang kami terima dari Liechtenstein Development, Vaduz, Principality of Liechtenstein.

Semarang, Maret 1978

Ir. Heinz Frick

Isi buku:

Jilid I, halaman:

1. Pengetahuan dasar tentang statika 13

1. 1 Pengetahuan dasar 13
   1. 1. 1 Pembangunan pada konstruksi batang dan rangka batang 14
   1. 1. 2 Beban pada konstruksi batang dan rangka batang 16
   1. 1. 3 Tumpuan pada konstruksi batang dan rangka batang 17
   1. 1. 4 Sifat-sifat bahan bangunan 19
1. 2 Gaya 20
1. 3 Mengumpulkan dan membagi gaya dalam satu bidang 21
   1. 3. 1 Ukuran dan jurusan pada gaya 21
   1. 3. 2 Gaya-gaya dengan titik tangkap bersama 23
   1. 3. 3 Poligon batang tarik 26
   1. 3. 4 Pembagian satu gaya R pada tiga garis kerja 32
1. 4 Momen 35
   1. 4. 1 Momen satu gaya 35
   1. 4. 2 Momen kumpulan gaya 35
   1. 4. 3 Gaya ganda 37
   1. 4. 4 Pindahan sejajar dari satu gaya 38
1. 5 Syarat-syarat keseimbangan 38
1. 6 Penggunaan syarat-syarat keseimbangan pada perhitungan konstruksi batang dan rangka batang 40
   1. 6. 1 Perhitungan reaksi pada tumpuan 40
   1. 6. 2 Gaya dalam 43
   1. 6. 3 Perjanjian tanda 44

2. Ilmu inersia dan ketahanan 46

2. 1 Besaran-besaran lintang 46
   2. 1. 1 Titik berat pada bidang 46
   2. 1. 2 Momen lembam dan momen sentrifugal pada bidang 49
   2. 1. 3 Momen lemban pada sistim koordinat berpindah 50
   2. 1. 4 Momen lembam pada sistim koordinat terputar 52
   2. 1. 5 Lingkaran Mohr 55

2. 2 Tegangan normal 57
2. 2. 1 Ketentuan keseimbangan 57
2. 2. 2 Ketentuan perubahan bentuk 59
2. 2. 3 Hubungan antara masing-masing tegangan 60
2. 2. 4 Garis sumbu nol 61
2. 2. 5 Gaya tekan dan gaya tarik 63
2. 2. 6 Momen lentur 63
2. 2. 7 Momen tahanan 64
2. 2. 8 Besaran inti 65
2. 3 Tegangan geser 69
2. 3. 1 Tegangan geser oleh gaya lintang 69
2. 3. 2 Tegangan geser oleh gaya torsi 72
2. 4 Tegangan-tegangan 73
2. 4. 1 Tegangan linear 73
2. 4. 2 Tegangan dalam bidang 76
2. 5. Penggunaan dan keamanan 79
2. 5. 1 Keamanan 79
2. 5. 2 Beban yang berulang-ulang 79
2. 5. 3 Teori-teori titik patah 81
2. 6 Tekukan 81
2. 6. 1 Macam-macam tekukan 81
2. 6. 2 Contoh-contoh 86
2. 6. 3 Tekukan pada topang ganda 87
2. 7 Tekukan ex-sentris 91
2. 7. 1 Tiang terbengkok 91
2. 7. 2 Tiang yang tertekan ex-sentris 93
2. 7. 3 Tiang dengan beban lintang 95
2. 8 Perhitungan lendutan dan garis elastis 96
2. 8. 1 Pengetahuan dasar 96
2. 8. 2 Syarat Mohr 96
2. 8. 3 Penentuan lendutan menurut Mohr secara grafis 97
2. 8. 4 Contoh-contoh 98

3. Kontruksi batang 101

3. 1 Pengetahuan dasar 101
3. 2 Balok tunggal 103
3. 2. 1 Balok tunggal dengan satu gaya 103
3. 2. 2 Balok tunggal dengan beberapa gaya 105
3. 2. 3 Balok tunggal dengan beban merata 108
3. 2. 4 Balok tunggal dengan beban merata terbatas 110

3. 2. 5 Balok tunggal dengan beban segitiga 113
3. 2. 6 Balok tunggal dengan macam-macam beban dan gaya 115
3. 2. 7 Contoh-contoh 117
3. 3 Konsole 120
3. 3. .1 Konsole dengan satu gaya pada ujung yang bebas 120
3. 3. 2 Konsole dengan beberapa gaya 121
3. 3. 3 Konsole dengan beban merata 121
3. 3. 4 Konsole dengan gaya horisontal 121
3. 3. 5 Konsole dengan macam-macam beban dan gaya 122
3. 4 Balok tunggal dengan konsole 123
3. 4. 1 Balok tunggal dengan satu konsole 123
3. 4. 2 Balok tunggal dengan dua konsole 127
3. 4. 3 Contoh-contoh 129
3. 5 Balok tunggal bersudut 134
3. 5. 1 Pengetahuan dasar 134
3. 5. 2 Balok tunggal bersudut siku 134
3. 5. 3 Balok tunggal bersudut miring 143
3. 5. 4 Balok tunggal dengan lengkungan miring 152
3. 6 Balok rusuk Gerber 153
3. 6. 1 Pengetahuan dasar dan kemungkinan-kemungkinan pemasangan engsel pada Balok rusuk Gerber 153
3. 6. 2 Contoh-contoh 158
3. 7 Konstruksi portal tiga ruas dan konstruksi busur tiga ruas 160
3. 7. 1 Pengetahuan dasar 160
3. 7. 2 Konstruksi portal tiga ruas 161
3. 7. 3 Konstruksi busur tiga ruas 168

4. Konstruksi rangka batang (vakwerk) 176

4. 1 Pengetahuan dasar 176
4. 2 Pembangunan konstruksi rangka batang 178
4. 2. 1 Ketentuan statis 178
4. 2. 2 Kestabilan konstruksi rangka batang 180
4. 2. 3 Pembangunan dan bentuk konstruksi rangka batang 181
4. 3 Penentuan gaya-gaya batang 183
4. 3. 1 Perhitungan gaya batang menurut Cremona 183
4. 3. 2 Perhitungan gaya batang menurut Cullmann 185
4. 3. 3 Perhitungan gaya batang menurut A. Ritter 186
4. 4 Tambahan pengetahuan tentang konstruksi rangka batang belah ketupat dan konstruksi rangka batang berbentuk K 188
4. 5 Contoh-contoh 190

5. Perhitungan alat-alat sambungan 203

5. 1 Alat-alat sambungan baja 203
5. 1. 1 Sambungan keling dan baut pada konstruksi baja 203
5. 1. 2 Sambungan las 207
5. 1. 3 Contoh sambungan-sambungan baja 212
5. 2 Alat-alat sambungan kayu 226
5. 2. 1 Gigi tunggal 226
5. 2. 2 Paku 227
5. 2. 3 Baut dan baut pasak khusus 230
5. 2. 4 Pasak cincin, bulldog connector dan plat paku 235
5. 2. 5 Konstruksi berlapis majemuk dengan perekat 239
5. 2. 6 Contoh sambungan-sambungan kayu 241

Jilid II, Halaman:

6. Balok terusan 253

6. 1 Balok terjepit 253
6. 1. 1 Pengetahuan dasar 253
6. 1. 2 Gaya-gaya pada balok terjepit 254
6. 1. 3 Lendutan 262
6. 1. 4 Balok terjepit sebelah 264
6. 2 Balok terjepit elastis 265
6. 2. 1 Pengetahuan dasar 265
6. 2. 2 Sistim titik potong 266
6. 2. 3 Jarak penting pada titik potong 270
6. 2. 4 Macam-macam jepitan 271
6. 3 Sistim titik potong pada balok terusan 274
6. 3. 1 Pengetahuan dasar 274
6. 3. 2 Menentukan titik potong 275
6. 3. 3 Gaya-gaya pada balok terusan 277
6. 4 Persamaan tiga momen (Clapeyron) 282
6. 5 Sistim Cross pada balok terusan 286
6. 5. 1 Pengetahuan dasar 286
6. 5. 2 Perjanjian tanda pada sistim Cross 287
6. 5. 3 Momen jepitan 287
6. 5. 4 Momen pada titik simpul 288
6. 5. 5 Momen jepitan dan momen distribusi yang disalurkan 289

6. 5. 6 Balok terusan dengan ujung pada engsel 290
6. 5. 7 Persiapan cara distribusi momen 292
6. 5. 8 Cara distribusi momen menurut Cross 292
6. 5. 9 Contoh-contoh 293

7. Konstruksi portal statis tidak tertentu 304

7. 1 Konstruksi portal dengan titik simpul yang kaku 304
7. 1. 1 Pengetahuan dasar 304
7. 1. 2 Cara distribusi momen menurut Cross 304
7. 1. 3 Contoh-contoh 305
7. 2 Kontruksi portal dengan titik simpul yang goyah 322
7. 2. 1 Penurunan tumpuan pada balok terjepit 322
7. 2. 2 Pengaruh atas titik simpul yang goyah 324
7. 2. 3 Contoh-contoh 326
7. 2. 4 Konstruksi portal bertingkat dengan titik simpul yang goyah 332

8. Perubahan bentuk elastis 342

8. 1 Pengetahuan dasar 342
8. 2 Teori tentang kerja virtual 343
8. 2. 1 Kerja virtual 343
8. 2. 2 Persamaan kerja pada konstruksi batang 345
8. 2. 3 Persamaan kerja pada konstruksi rangka batang 350
8. 2. 4 Hasil pèng-integral-an pada kerja virtual 351
8. 3 Syarat-syarat brikatan pada perubahan bentuk elastis 354
8. 3. 1 Syarat Betti 354
8. 3. 2 Syarat Maxwell 355
8. 3. 3 Syarat Castigliano 356
8. 3. 4 Syarat Mohr 357
8. 3. 5 Ringkasan 358
8. 4 Contoh-contoh 359
8. 4. 1 Pergeseran dan perputaran pada konstruksi batang 359
8. 4. 2 Pergeseran pada konstruksi rangka batang 369
8. 5 Garis elastis pada konstruksi batang 372
8. 5. 1 Pengetahuan dasar 372
8. 5. 2 Penentuan bobot-beban W 372
8. 5. 3 Penentuan garis elastis dengan bobot beban W pada konstruksi batang 374

8. 6 Garis elastis pada konstruksi rangka batang 379
8. 6. 1 Pengetahuan dasar 379
8. 6. 2 Penentuan garis elastis dengan bobot beban W pada konstruksi rangka batang 379
8. 6. 3 Ringkasan 384
8. 6. 4 Contoh 384

9. Garis pengaruh 389

9. 1 Pengetahuan dasar dan penggunaan garis pengaruh 389
9. 1. 1 Pengetahuan dasar 389
9. 1. 2 Penentuan garis pengaruh 390
9. 1. 3 Penggunaan garis pengaruh 391
9. 1. 4 Ringkasan 393
9. 2 Garis pengaruh pada balok tunggal 393
9. 2. 1 Garis pengaruh pada reaksi tumpuan 393
9. 2. 2 Garis pengaruh pada gaya lintang 394
9. 2. 3 Garis pengaruh pada momen lentur 395
9. 2. 4 Beban yang tidak langsung 396
9. 2. 5 Garis pengaruh pada lendutan 398
9. 2. 6 Ringkasan 399
9. 2. 7 Contoh-contoh 399
9. 3 Garis pengaruh pada konsole, pada balok tunggal dengan konsole dan pada balok rusuk Gerber 406
9. 3. 1 Garis-pengaruh pada konsole 406
9. 3. 2 Garis pengaruh pada balok tunggal dengan konsole 407
9. 3. 3 Garis pengaruh pada balok rusuk Gerber 409
9. 3. 4 Ringkasan 410
9. 3. 5 Contoh-contoh 411
9. 4 Garis pengaruh pada busur tiga ruas 415
9. 4. 1 Perhitungan dengan beban yang tetap 415
9. 4. 2 Garis pengaruh pada reaksi tumpuan 417
9. 4. 3 Garis pengaruh pada momen lentur 418
9. 4. 4 Garis pengaruh pada gaya normal dan gaya lintang 419
9. 4. 5 Ringkasan 421
9. 4. 6 Contoh 421
9. 5 Garis pengaruh pada konstruksi rangka batang 424
9. 5. 1 Pengetahuan dasar 424
9. 5. 2 Konstruksi rangka batang dengan tepi sejajar 425
9. 5. 3 Konstruksi rangka batang dengan batang tepi tidak sejajar 429

9. 5. 4 Ringkasan 437
9. 5. 5 Contoh-contoh 438
9. 6 Garis pengaruh pada balok terusan 449
Pengetahuan dasar 9. 6. 1 449
9. 6. 2 Garis pengaruh pada reaksi tumpuan yang statis berlebih 450
9. 6. 3 Garis pengaruh pada reaksi tumpuan, momen lentur dan gaya lintang 452
9. 6. 4 Penentuan garis-garis pengaruh secara grafis 452

I. Lampiran 459

I. 1 Rumus-rumus yang penting 459
I. 1. 1 Rumus-rumus yang penting pada bab: Pengetahuan dasar 459
I. 1. 2 Rumus-rumus yang penting pada bab: Ilmu inersia dan ketahanan 459
I. 1. 3 Rumus-rumus yang penting pada bab: Konstruksi batang 461
I. 1. 4 Rumus-rumus yang penting pada bab: Konstruksi rangka batang 462
I. 1. 5 Rumus-rumus yang penting pada bab: Perhitungan alat-alat sambungan 462
I. 1. 6 Rumus-rumus yang penting pada bab: Balok terusan 462
I. 1. 7 Rumus-rumus yang penting pada bab: Konstruksi portal statis tidak tertentu 464
I. 1. 8 Rumus-rumus yang penting pada bab: Perubahan bentuk elastis 464
I. 1. 9 Rumus-rumus yang penting pada bab: Garis pengaruh 465
I. 2 Tabel-tabel 467
I. 2. 1 Penentuan titik berat pada bidang yang datar 467
I. 2. 2 Penentuan momen lembam dan momen tahanan 470
I. 2. 3 Nilai-nilai bahan baja profil 472
I. 2. 4 Nilai-nilai balok kayu segiempat 484
I. 2. 5 Tegangan tekuk yang diperkenankan untuk baja ST 37 487
I. 2. 6 Faktor tekuk yang diperkenankan untuk kayu kelas I s/d IV 488

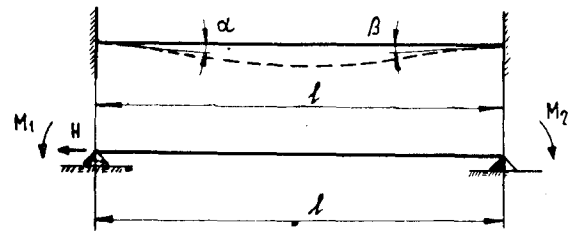
I. 2. 7 Penentuan tegangan σ maksimal dan lendutan f maksimal pada konstruksi batang 493
I. 2. 8 Penentuan momen dan reaksi tumpuan pada balok rusuk Gerber 494
I. 2. 9 Nilai-nilai alat sambungan besi seperti keling, baut dan las 496
I. 2.10 Nilai-nilai alat sambungan kayu seperti paku, baut, baut pasak khusus, pasak cincin, bulldog connector dan pelat paku 499
I. 2.11 Penentuan momen jepitan pada balok terjepit dan pada balok terjepit sebelah 505
I. 2.12 Penentuan bagian beban pada syarat persamaan tiga momen menurut Clapeyron 509
I. 2.13 Penentuan momen dan reaksi tumpuan pada balok terusan 512
I. 2.14 Hasil peng-integral-an pada kerja virtual 516
I. 3 Daftar kependekan 518
I. 4 Daftar istilah penting 520
I. 5 Pustaka

6. Balok terusan

6. 1. Balok terjepit

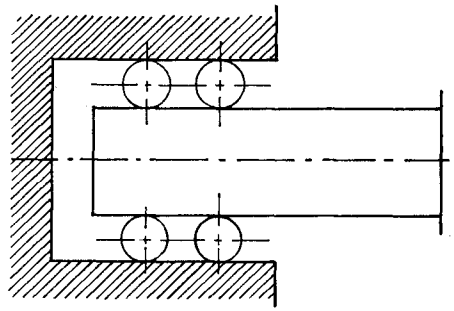
6. 1. 1. Pengetahuan dasar

Jepitan pada suatu balok terjadi kalau sudut putar tumpuan α dan β lebih kecil daripada balok tunggal garis elastis mengubah lengkungan makin keras penjepitan makin lebih dekat pada pertengahan balok terjepit.
Jepitan maximal terjadi kalau sudut α dan $\beta = o$.
Oleh karena balok terjepit merupakan tiga kali statis tidak tertentu, maka kita tidak dapat berhasil menggunakan syarat-syarat perseimbangan.
Yang sebetulnya harus kita cari ialah:
M_1; M_2 dan H



Gambar 6. 1. 1. a.

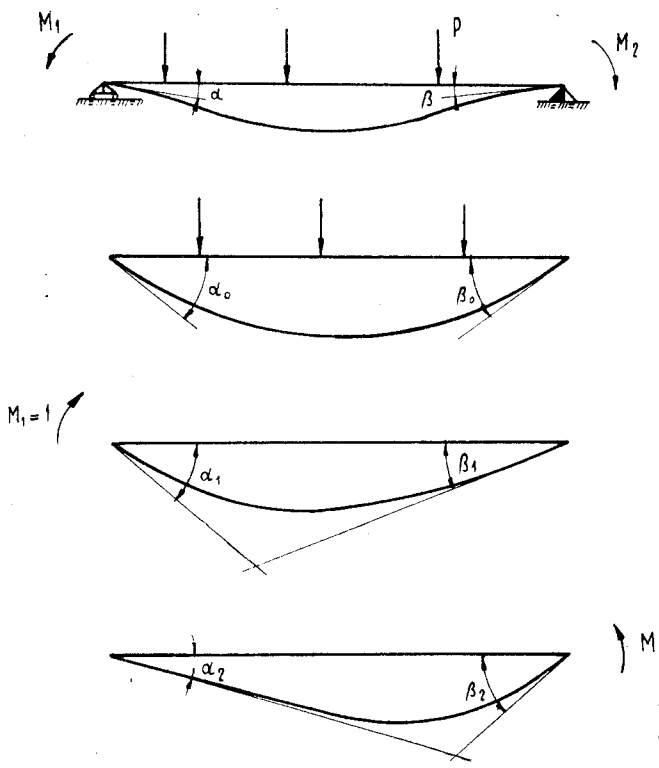
Pada umumnya gaya H boleh dihapuskan, jikalau digunakan sistim tumpuan jepitan seperti berikut, tinggallah perhitungan M_1 dan M_2.



Gambar 6. 1. 1. b.

6. 1. 2. Gaya-gaya pada balok terjepit

Kita memilih suatu sistim dasar yang serupa dengan sistim yang kita punyai, kita terapkan untuk balok terjepit dengan panjang (lebar bentang) *l* kita memilih satu balok tunggal dengan lebar bentang *l*.
Pada sistim dasar ini kita pasang semua gaya dan beban yang ada dengan tambahan momen M_1 dan M_2.
Dengan menentukan sudut putar tumpuan (pada contoh ini $\alpha = \beta = 0$) kita bisa menentukan syarat-syarat elastis dan selanjutnya dengan superposisi perhitungan statika dengan menggunakan persamaan elastis.



Sistim dasar: balok tunggal

Perubahan bentuk pada sistim dasar: oleh gaya dan beban α_o; β_o sudut putar tumpuan

oleh $M_1 = 1$ α_1; β_1 sudut putar tumpuan

oleh $M_2 = 1$ α_2; β_2 putar tumpuan

Gambar 6. 1. 2. a.

Dengan superposisi bagian-bagian dari sudut putar tumpuan kita mendapat persamaan elastis seperti berikut:

$$\alpha = \alpha_o + M_1 \cdot \alpha_1 + M_2 \cdot \alpha_2$$
$$\beta = \beta_o + M_1 \cdot \beta_1 + M_2 \cdot \beta_2 \qquad (6.1)$$

Atas dasar ini baru kita mencari momen jepitan M_1; M_2:

$$M_1 = \frac{(\alpha - \alpha_0) \cdot \beta_2 - (\beta - \beta_0)\,\alpha_2}{\alpha_1 \cdot \beta_2 - \beta_1 \cdot \alpha_2} \qquad M_2 = \frac{(\beta - \beta_0) \cdot \alpha_1 - (\alpha - \alpha_0) \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2 - \beta_1 \cdot \alpha_2} \qquad (6.2.)$$

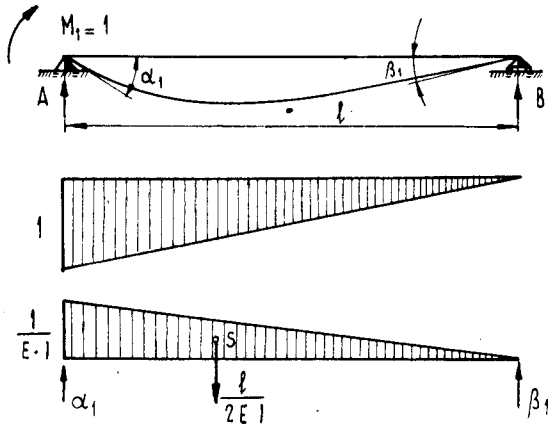
Pada contoh di atas dengan sudut putar tumpuan $\alpha = \beta =$ o momen jepitan M_1; M_2 menjadi:

$$M_1 = \frac{\beta_0 \cdot \alpha_2 - \alpha_0 \cdot \beta_2}{\alpha_1 \cdot \beta_2 - \beta_1 \cdot \alpha_2} \qquad M_2 = \frac{\alpha_0 \cdot \beta_1 - \beta_0 \cdot \alpha_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2 - \beta_1 \cdot \alpha_2} \qquad (6.3.)$$

Cara perhitungan sudut putar tumpuan:

Cara paling mudah untuk mencari sudut putar tumpuan ialah dengan membebani sistim dasar dengan diagram (bidang) momen yang direduksikan dengan faktor $1/E \cdot I$.

α_1 dan β_1



Sistim dasar

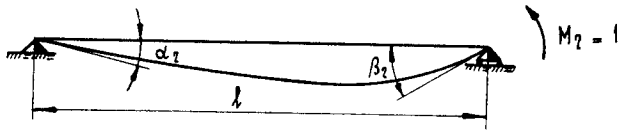
Diagram momen

Bidang momen yang dibebani

Gambar 6. 1. 2. b.

$$\alpha_1 = \frac{l}{3EI} \qquad \beta_1 = \frac{l}{6EI} \qquad (6.4.)$$

α_2 **dan** β_2



Sistim dasar

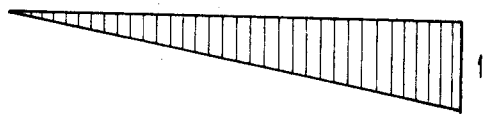
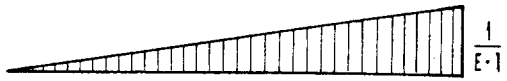


Diagram momen



Bidang momen yang dibebani

Gambar 6. 1. 2. c.

$$\beta_2 = \frac{l}{3EI}$$

$$\alpha^2 = \frac{l}{6EI} \qquad (6.5.)$$

Hasil tentang $\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2$ →

$$\alpha_1 = \beta_2$$

$$\beta_1 = \alpha_2 \qquad (6.6.)$$

Dengan hasil ini kita bisa mengisi persamaan elastis. Maka:

$$M_1 = \left[(2\alpha - \beta) - (2\alpha_0 - \beta_0)\right] \cdot \frac{2EI}{l}$$

$$M_2 = \left[(2\beta - \alpha) - (2\beta_0 - \alpha_0)\right] \cdot \frac{2EI}{l} \qquad (6.7.)$$

Dan pada contoh dengan $\alpha = \beta = o$ → $M_1; M_2$ menjadi:

$$M_1 = -(2\alpha_0 - \beta_0) \cdot \frac{2EI}{l}$$

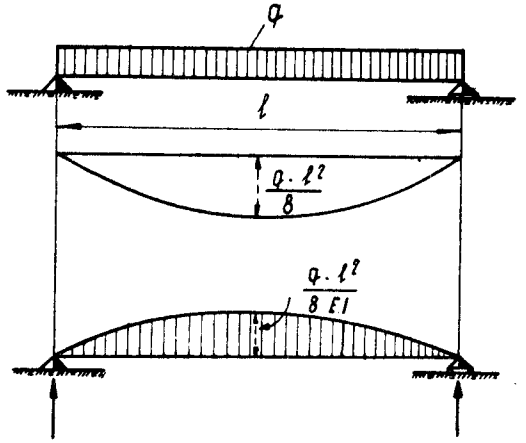
$$M_2 = -(2\beta_0 - \alpha_0) \cdot \frac{2EI}{l} \qquad (6.8.)$$

Untuk mencari M_1 dan M_2 yang sebenarnya kita hanya harus mencari α_o dan β_o.

Mencari α_0 **dan** β_0.

Sebagai dasar dapat dikatakan, bahwa α_o dan β_o bisa didapat dengan membebani sistim dasar dengan M_o diagram (bidang) momen yang direduksikan dengan faktor $1/E \cdot I$.

Contoh beban merata:



Sistim dasar

Diagram momen

Bidang momen yang dibebani

Gambar 6. 1. 2. d.

$\alpha_o = \beta_o = R_A = R_B$ dari bidang momen yang dibebani

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \frac{q \cdot l^2}{8EI} \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = \beta_0 = \frac{q \cdot l^3}{24EI} \qquad (6.9.)$$

Sekarang momen jepitan M_1 dan M_2 dapat dihitung:

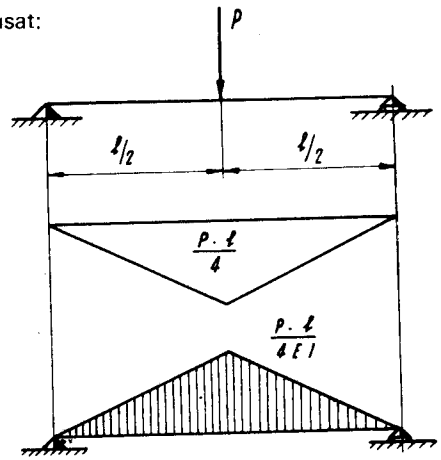
$$M_1 = -\left(2\frac{q \cdot l^3}{24EI} - \frac{q \cdot l^3}{24EI}\right) \cdot \frac{2EI}{l}$$

$M_1 = M_2$
karena sistim symetris

$$M_1 = M_2 = -\frac{q \cdot l^2}{12} \qquad (6.10.)$$

Jurusan Pendidikan Kepustakaan

Contoh gaya pusat:



Sistim dasar

Diagram momen

Bidang momen yang dibebani

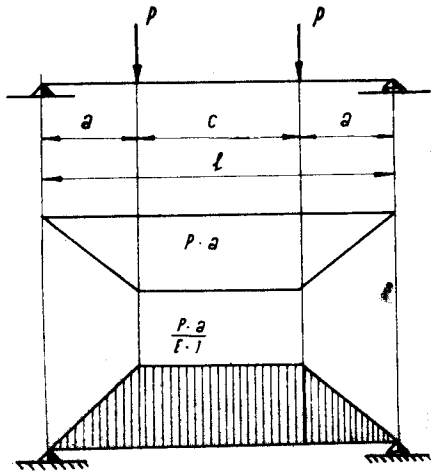
Gambar 6. 1. 2. e.

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{P \cdot l}{4EI} \cdot \frac{l}{4} - \frac{P \cdot l^2}{16EI} \qquad \boxed{\alpha_0 = \beta_0 = \frac{P \cdot l^2}{16EI}} \qquad (6.11.)$$

dan untuk $M_1 = M_2$

$$M_1 = -\left(2 \frac{P \cdot l^2}{16EI} - \frac{P \cdot l^2}{16EI}\right) \cdot \frac{2EI}{l} \qquad \boxed{M_1 = M_2 = -\frac{P \cdot l}{8}} \qquad (6.12.)$$

Contoh dua gaya yang simetris:



Sistim dasar

Diagram momen

Bidang momen yang dibebani

Gambar 6. 1. 2. f.

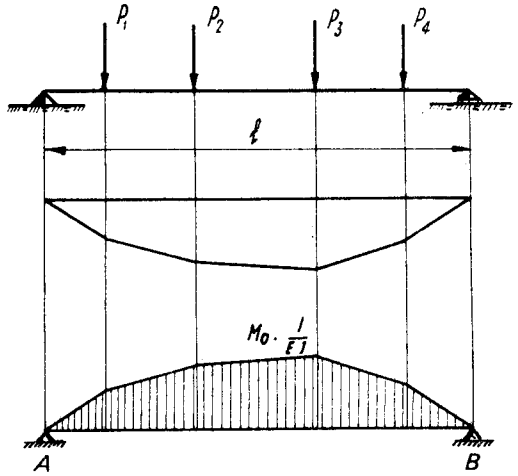
$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{P \cdot a}{E \cdot I} \cdot \frac{c}{2} + \frac{P \cdot a}{E \cdot I} \cdot \frac{a}{2} \qquad \boxed{\alpha_0 = \beta_0 = \frac{P \cdot a}{2 \cdot EI}(a + c)} \qquad (6.13.)$$

dan untuk $M_1 = M_2$

$$M_1 = -\left[2 \frac{P \cdot a}{2EI} (a + c) - \frac{P \cdot a}{2EI} (a + c)\right] \frac{2EI}{l}$$

$$\boxed{M_1 = M_2 - \frac{-P \cdot a}{l}(a + c)} \qquad (6.14.)$$

Contoh dengan beberapa gaya:



Sistim dasar

Diagram momen

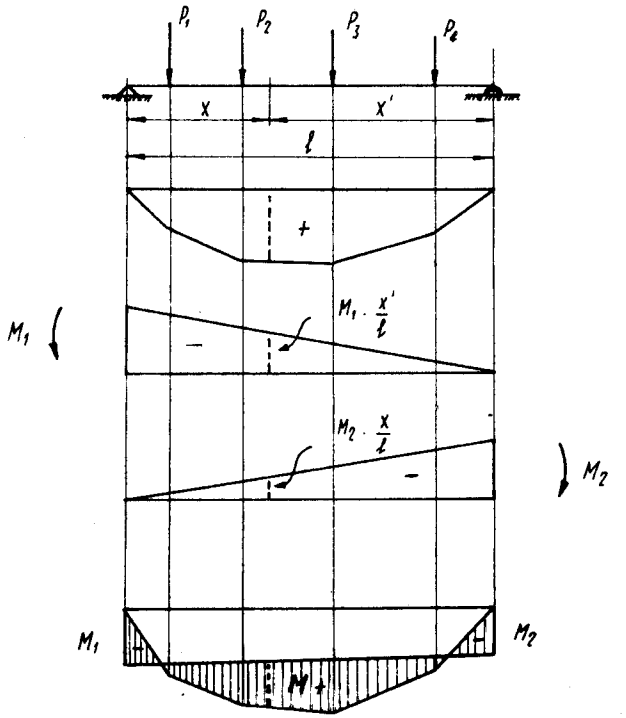
Bidang momen yang dibebani

Gambar 6. 1. 2. g.

Mencari bidang M_o menurut bab. 3. 2. 2. *Mekanika teknik — Statika dan kegunaannya* jilid I.
Selanjutnya dibebani sistim dasar dengan bidang M_o yang dibagi dengan $E \cdot I$.
Selanjutnya menentukan reaksi tumpuan α_o dan β_o.

Menentukan diagram momen dan diagram gaya lintang

Untuk memungkinkan gambaran diagram momen kita menggambar diagram momen M_o, diagram momen jepitasn M_1 dan M_2 dan selanjutnya semua disuperposisi. Hasil sekarang menjadi momen dari balok terjepit.



Sistim dasar

Diagram momen oleh M_o

Diagram momen oleh M_1

Diagram momen oleh M_2

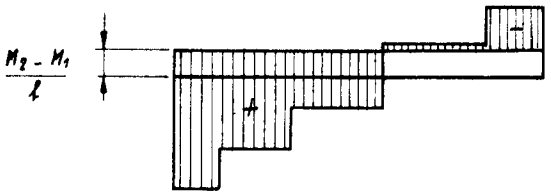
Diagram momen yang disuperposisi

Gambar 6. 1. 2. h.

Momen pada titik x adalah:

$$M = M_0 + M_1 \cdot \frac{x}{l} + M_2 \cdot \frac{x}{l} \qquad (6.15.)$$

(perhatikan tanda (+ , —) pada momen M_1 dan M_2)



Untuk menggambar diagram gaya lintang kita tambah Q_o dari sistim dasar dengan $\frac{M_2 - M_1}{l}$

Gambar 6. 1. 2. i.

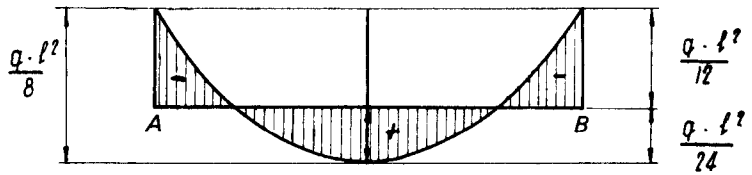
Rumus untuk menentukan Q →

$$Q = Q_0 + \frac{M_2 - M_1}{l} \qquad (6.16.)$$

Harus memperhatikan tanda (+ , —) dari M_1 dan M_2. Biasanya gaya lintang yang lebih besar harus berada pada tumpuan dengan momen jepitan yang lebih besar.
Dengan rumus tentang gaya lintang bisa juga ditentukan reaksi tumpuan seperti berikut:

$$R_A = R_{A_o} + \frac{M_2 - M_1}{l} \qquad R_B = R_{B_o} + \frac{M_1 - M_2}{l} \qquad (6.17.)$$

Contoh-contoh:
Balok terjepit dengan beban merata
Diagram momen:



Gambar 6. 1. 2. k.

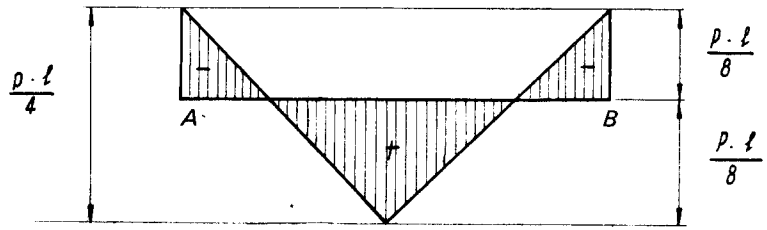
Momen, gaya lintang, tumpuan:

$$M_{Fmax} = \frac{q \cdot l^2}{24} = \left(\frac{1}{3} M_0\right) \qquad (6.18.)$$

$Q = Q_0$ karena $M_2 - M_1 = 0$

$R_A = R_B = R_{A_o} = R_{B_o}$

Balok terjepit dengan gaya pusat
Diagram momen:



Momen, gaya lintang, tumpuan:

Gambar 6. 1. 2. l.

$$M_{Fmax} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \left(\frac{1}{2} \cdot M_0\right) \qquad (6.19)$$

$Q = Q_0$ karena $M_2 - M_1 = 0$

$R_A = R_B = R_{A_o} = R_{B_o}$

6. 1. 3. Lendutan

Perhitungan lendutan pada balok terjepit didapat dengan superposisi dari lendutan-lendutan pada sistim dasar:

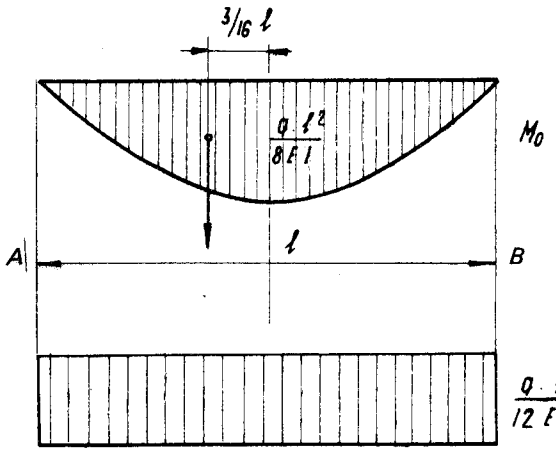
Gaya-gaya dan beban pada sistim dasar memperlakukan lendutan sebesar ..... f_o

Jepitan atau momen jepitan pada sistim dasar memperlakukan lendutan sebesar ..... f_m

Lendutan pada balok terjepit adalah superposisi $(f_o - f_m)$ .....

$$\boxed{f = f_o - f_m} \qquad (6.20.)$$

Contoh beban merata:



$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l^3}{24\,E\,I}$$

$$f_o = R_A\left(\frac{l}{2} - \frac{3\,l}{16}\right)$$

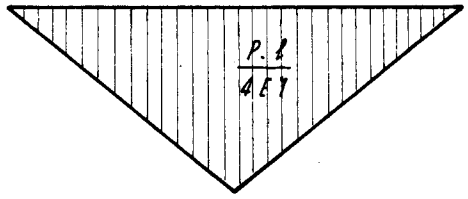
$$f_o = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$$

$$f_m = \frac{q \cdot l^2}{12 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{q \cdot l^4}{96 \cdot E\,I}$$

Gambar 6. 1. 3. a.

$$f = \frac{5\,q \cdot l^4}{384 \cdot E\,I} - \frac{4\,q \cdot l^4}{384\,E\,I} = \boxed{f - \frac{q \cdot l^4}{384 \cdot E\,I}} \qquad (6.21.)$$

Contoh gaya pusat:



$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l^3}{24\,E\,I}$$

$$f_o = R_A\left(\frac{l}{2} - \frac{3\,l}{16}\right)$$

$$f_o = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$$

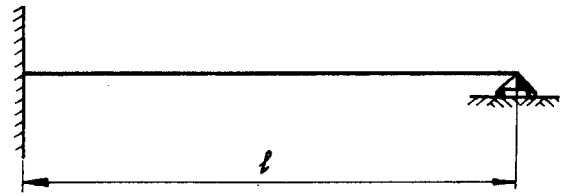
$$f_m = \frac{q \cdot \beta}{12 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{q \cdot l^4}{96 \cdot E\,I}$$

Gambar 6. 1. 3. b.

$$f = \frac{p \cdot \beta}{48\,E\,I} - \frac{p \cdot \beta}{64\,E\,I} = \boxed{f = \frac{p \cdot \beta}{192\,E\,I}} \qquad (6.22)$$

6. 1. 4. Balok terjepit sebelah

Seperti pada balok terjepit, kita pilih juga satu sistim dasar, yaitu balok tunggal.



Gambar 6. 1. 4. a.

Pada sistim dasar ini kita pasang semua gaya dan beban yang ada dengan tambahan M_1.

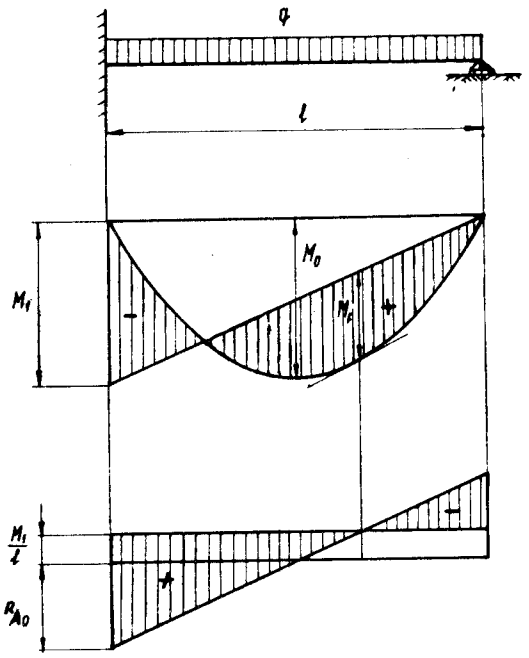
Kita menentukan selanjutnya, bahwa sudut putar tumpuan $\alpha = 0$.

Syarat-syarat elastis: $\alpha = \alpha_o + M_1 \cdot \alpha_1 = 0$

$$\boxed{M_1 = \frac{-\alpha_0}{\alpha_1}} \qquad \text{(kalau } \alpha = 0\text{)} \qquad (6.23.)$$

$$\boxed{M_1 = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1}} \qquad \text{(kalau } \alpha > 0\text{)} \qquad (6.24.)$$

Contoh beban merata:



Gambar 6. 1. 4. b.

$$M_{0\,max} \cdot = -\frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$M_1 : \quad \alpha_0 = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI}$$

$$\alpha_1 = \frac{l}{3EI}$$

$$M_1 = \frac{q \cdot l^3}{24\,EI} \cdot \frac{3EI}{l}$$

$$\boxed{M_1 = \frac{q \cdot l^2}{8}} \qquad (6.25)$$

$$X = \frac{R_B}{q}$$

$$\boxed{M_{max} = \frac{R_B^2}{2q}} \qquad (6.26.)$$

Hanya pada tumpuan dengan momen $M = 0$.

Gaya lintang:

$$Q = Q_0 + \frac{M_2 - M_1}{l}$$

$$Q = Q_0 + \frac{M}{l}$$

$$\boxed{Q = Q_0 + \frac{q \cdot l}{8}} \qquad (6.27.)$$

Reaksi pada tumpuan:

$$R_A = R_{A_0} + \frac{q \cdot l}{8}$$

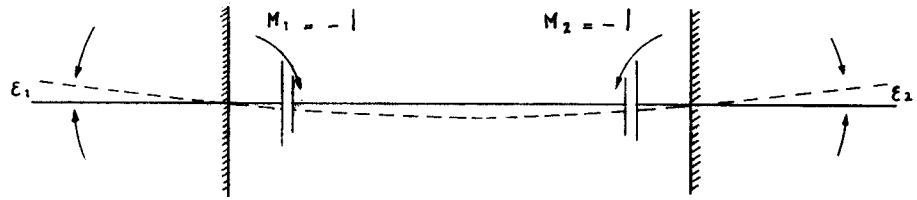
$$R_A = \frac{q \cdot l}{2} + \frac{q \cdot l}{8}$$

$$\boxed{R_A = \frac{5q \cdot l}{8}}$$

$$\boxed{R_B = \frac{3q \cdot l}{8}} \qquad (6.28.)$$

6. 2. Balok terjepit elastis

6. 2. 1. Pengetahuan dasar



Gambar 6. 2. 1. a.

Suatu ujung balok pada umumnya terjepit elastis jikalau sudut putar tergantung pada besarnya momen jepitan.

$\alpha = -\varepsilon_1 \cdot M_1$ adalah jepitan elastis pada tumpuan sebelah kiri. ε_1 adalah ukuran jepitan pada tumpuan sebelah kiri dan sudut pada tumpuan yang terpotong dari balok terjepit pada momen $M_1 = -1$.

$\beta = -\varepsilon_2 \cdot M_2$ adalah jepitan elastis pada tumpuan sebelah kanan.

ε_2 adalah ukuran jepitan pada tumpuan sebelah kanan.

$\alpha = -\varepsilon_1 \cdot M_1$ dan $\beta = -\varepsilon_2 \cdot M_2$ adalah syarat-syarat elastis pada balok terjepit elastis. Atas dasar ini kita juga bisa menggunakan sebagian dari persamaan elastis yang sudah ditentukan pada bab 6. 1. Balok terjepit.

Catatan: persamaan elastis hanya boleh digunakan untuk konstruksi balok di atas tiang yang kaku dan bukan di atas tiang yang goyah atau tumpuan yang bisa mengalami penurunan.

Persamaan elastis yang baru adalah:

$$\alpha = \alpha_0 + M_1 \cdot \alpha_1 + M_2 \cdot \alpha_2 = -\varepsilon_1 \cdot M_1$$

$$\beta = \beta_0 + M_1 \cdot \beta_1 + M_2 \cdot \beta_2 = -\varepsilon_2 \cdot M_2$$

atau:

$$\alpha_0 + M_1 (\alpha_1 + \varepsilon_1) + M_2 \cdot \alpha_2 = 0$$

$$\beta_0 + M_1 \cdot \beta_1 + M_2 (\beta_2 + \varepsilon_2) = 0$$

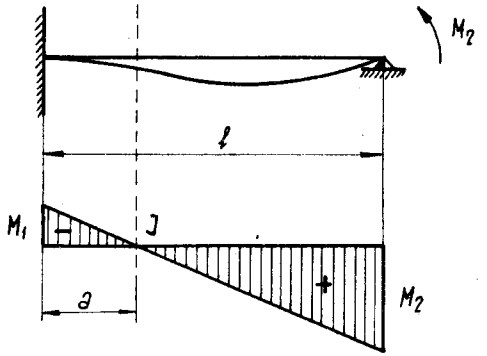
Atas dasar persamaan elastis ini kita bisa mencari momen jepitan M_1 dan M_2 menurut rumus berikut:

$$\boxed{M_1 = \frac{\beta_0 \cdot \alpha_2 - \alpha_0 (\beta_2 + \varepsilon_2)}{(\alpha_1 + \varepsilon_1)(\beta_2 + \varepsilon_2) - \alpha_2 \cdot \beta_1}} \qquad (6.29.)$$

$$M_2 = \frac{\alpha_0 \cdot \beta_1 - \beta_0 (\alpha_1 + \varepsilon_1)}{(\alpha_1 + \varepsilon_1)(\beta_2 + \varepsilon_2) - \alpha_2 \cdot \beta_1} \qquad (6.29.)$$

6. 2. 2. Sistim titik potong

Kita memilih satu balok terjepit sebelah tanpa gaya dan tanpa beban, hanya dengan momen sebelah tumpuan sendi. Atas dasar ini balok akan melengkung dan kita bisa menggambar diagram momen.



Gambar 6. 2. 2. a.

Dengan persamaan elastis atas dasar $\alpha_0 = 0$ kita boleh berkata:

$$M_1(\alpha_1 + \varepsilon_1) + M_2 \cdot \alpha_2 = 0$$

atau: $$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \varepsilon_1}$$

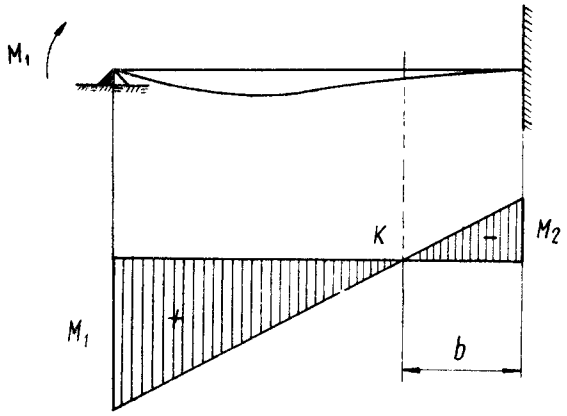
Oleh karena diagram momen adalah satu garis lurus, kita bisa menghitung tempat titik potong *J*. Boleh dikatakan jarak *a* untuk titik potong *J* adalah suatu perbandingan dengan momen M_1 dan M_2:

$$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{a}{l - a}$$

atau: $$\frac{a}{l - a} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \varepsilon_1}$$

dan selanjutnya: $$a = \frac{\alpha_2 \cdot l}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1} \qquad (6.30)$$

Pada bagian kanan kita bisa menggunakan perhitungan yang sama dengan hasil seperti berikut:
(*K* menjadi titik potong sebelah kanan dengan jarak *b*)



$$M_1 \cdot \beta_1 + M_2(\beta_2 + \varepsilon_2) = 0$$

atau: $$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{\beta_1}{\beta_2 + \varepsilon_2}$$

menurut Gambar 6.2.2.b.:

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{b}{l - b}$$

atau: $$\frac{\beta_1}{\beta_1 + \varepsilon_2} = \frac{b}{l - b}$$

Gambar 6.2.2.b.

dan selanjutnya: $$b = \frac{\beta_1 \cdot l}{\beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_2} \qquad (6.31.)$$

Dengan perhitungan ini kita mempelajari bahwa: Jarak titik potong *a* dan *b* tidak bergantung pada besarnya momen M_1 dan M_2.
Dengan menggunakan pengetahuan ini kita bisa mencari M_1 dan M_2 seperti berikut:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \varepsilon_1} = \frac{a}{l - a} \quad \rightarrow \quad \alpha_1 + \varepsilon_1 = \alpha_2 \cdot \frac{l - a}{a}$$

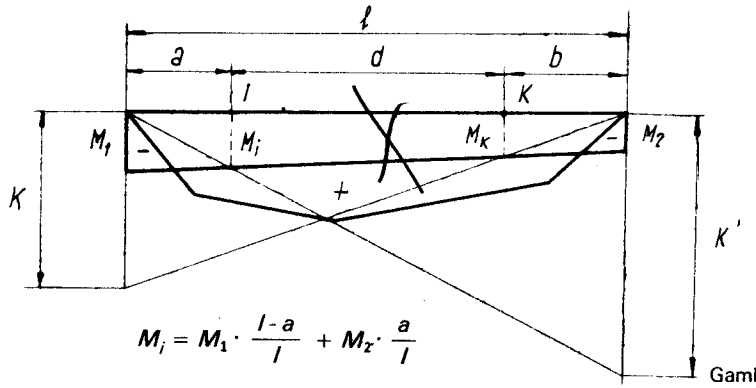
$$\frac{\beta_1}{\beta_2 + \varepsilon_2} = \frac{b}{l - b} \quad \rightarrow \quad \beta_2 + \varepsilon_2 = \beta_1 \frac{l - b}{b}$$

Menurut rumus (6.29.) kita boleh menghitung M_1 dan M_2 sebagai:

$$M_1 = \frac{\beta_0 \cdot a \cdot b - \alpha_0 \cdot a(l - b)}{\alpha_2 \cdot d \cdot l}$$

$$M_2 = \frac{\alpha_0 \cdot a \cdot \beta - \beta_0 (l - a) b}{\alpha_2 \cdot d \cdot l} \qquad (6.32.)$$

Kalau kita menarik garis siku-siku dengan balok pada titik potong *J* dan titik potong *K* (garis titik potong), garis titik potong itu menentukan momen titik potong sebesar M_j dan M_k. Keuntungan pada M_j dan M_k adalah bahwa mereka dapat dihitung lebih mudah daripada M_1 dan M_2, dan pada bagian besar M_j dan M_k bisa juga ditentukan secara grafis:



$$M_i = M_1 \cdot \frac{l-a}{l} + M_2 \cdot \frac{a}{l}$$

Gambar 6. 2. 2. c.

$$M_k = M_1 \cdot \frac{b}{l} + M_2 \frac{l-b}{l}$$

Atau dengan bantuan rumus (6. 32.) hasilnya M_i dan M_k seperti berikut:

$$M_1 = -\frac{\alpha}{l} \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \qquad M_k = -\frac{b}{l} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_1} \qquad (6.33.)$$

Hasil ini berdasarkan pada konstruksi sederhana yang dinamakan garis bersilang dan potongan garis bersilang:

$$\frac{a}{l} = \frac{M_i}{K'} \qquad \frac{b}{l} = \frac{M_k}{K}$$

atau: $$K' = \frac{M_i \cdot l}{a} = -\frac{a}{l} \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \cdot \frac{l}{a}$$

dan selanjutnya:

$$K' = -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} \qquad K = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \qquad (6.34.)$$

Dengan pengetahuan tentang titik potong dan garis bersilang dan pada balok dengan momen lembam I tetap kita bisa menentukan garis penutup pada segala diagram momen pada balok terjepit dan balok terusan secara grafis.

Untuk balok dengan momen lembam I yang tetap adalah beberapa hubungan yang memudahkan perhitungan jarak titik potong dan momen titik potong seperti berikut:

Jarak titik potong untuk I tetap menurut rumus (6. 30.) dan (6. 31.):

$$a = \frac{\alpha_2 \cdot l}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1} = \frac{\frac{l}{6EI} \cdot l}{\frac{l}{3EI} + \frac{l}{6EI} + \varepsilon_1}$$

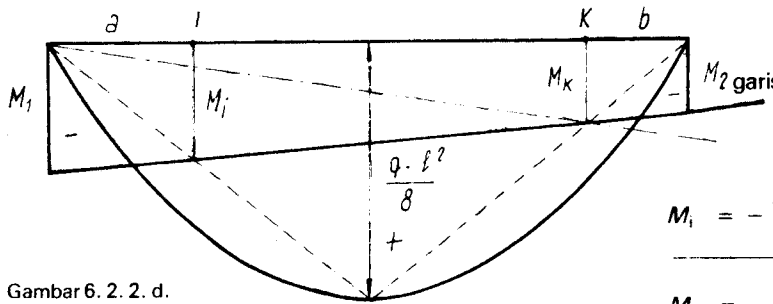
$$a = \frac{l}{3 + \frac{6EI \cdot \varepsilon_1}{l}} \qquad b = \frac{l}{3 + \frac{6EI \cdot \varepsilon_2}{l}} \qquad (6.35.)$$

Momen pada titik potong untuk I tetap menurut rumus (6. 33.)

$$M_1 = -\frac{a \cdot \alpha_0}{l \cdot \alpha_2} = -\frac{6 \cdot a \cdot E \cdot I \cdot \alpha_0}{l^2}$$

$$M_i = \frac{6 \cdot a \cdot E \cdot I \cdot \alpha_0}{l^2} \qquad M_k = -\frac{6 \cdot b \cdot E \cdot I \cdot \beta_0}{l^2} \qquad (6.36.)$$

Contoh beban merata:



Gambar 6. 2. 2. d.

$$M_i = -\frac{q \cdot a \cdot l}{4}$$

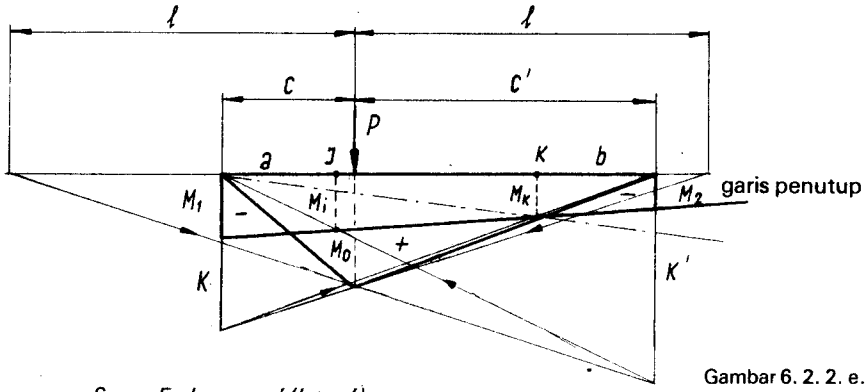
$$M_k = -\frac{q \cdot b \cdot l}{4}$$

Bukti dari gambar:

$$\frac{M_i}{\frac{q \cdot l^2}{8}} = \frac{a}{\frac{l}{2}} \rightarrow M_i = \frac{q \cdot a \cdot l}{4}$$

(sama juga untuk M_K)

Contoh gaya P dengan jarak c dan c':



Gambar 6. 2. 2. e.

$$M_i = -\frac{6 \cdot a \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot P \cdot \underbrace{\frac{c\,c'(l + c')}{6 \cdot l \cdot EI}}_{\alpha_0}$$

$$M_i = -P \cdot a \cdot \frac{c\,c' \cdot (l + c')}{l^2} \qquad M_k = -P \cdot b \cdot \frac{c\,c'(l + c)}{l^3}$$

Bukti dari gambar:

$$\frac{M_i}{K'} = \frac{a.}{l} \qquad \frac{M_i}{M_o} = \frac{a\,(l + c')}{l^2} \qquad M_i = P \cdot a \cdot \frac{c \cdot c'(l + c')}{l^3}$$

$$\frac{M_0}{K'} = \frac{l}{i + c'} \qquad \frac{P \cdot c \cdot c'}{l}$$

6. 2. 3. Jarak penting pada titik potong

Jarak titik potong pada balok terjepit kaku:

Gambar 6. 2. 3. a.

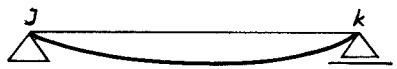
oleh karena $\alpha = 0 \rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$a = \frac{\alpha_2 \cdot l}{\alpha_1 + \alpha_2}$	$b = \frac{\beta_1 \cdot l}{\beta_1 + \beta_2}$

(6. 37.)

bagi l tetap, $a = \dfrac{\frac{l}{6 \cdot E \cdot l} \cdot l}{\frac{l}{3 \cdot E \cdot l} + \frac{l}{6 \cdot E \cdot l}} = \frac{l}{3} = b$ $\qquad \boxed{a = b = \frac{l}{3}}$ (6.38.)

Jarak titik potong pada balok tunggal:

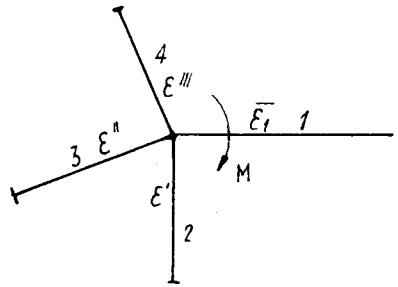


$$a = \frac{\alpha_2 \cdot l}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1 \downarrow \infty} = \boxed{a = b = 0} \qquad (6.39.)$$

Gambar 6. 2. 3. b.

6. 2. 4. Macam-macam jepitan

Pada suatu titik simpul kita bisa menerangkan persoalan:



Gambar 6. 2. 4. a.

Batang 1 yang dihubungkan dengan kaku pada batang-batang 2 s/d 4 menerima momen M.

Kejadian ini menimbulkan dua pertanyaan:

1. Bagaimasna besarnya bagian momen M pada batang-batang 2 s/d 4.?
2. Berapa besarnya ukuran jepitan batang 1 terhadap batang-batang 2 s/d 4?

Di bawah akibat momen M semua batang-batang memutar dengan sudut α karena hubungannya yang kaku. Kita mengambil salah satu batang, umpamanya batang 2, dan memperhatikan kejadian itu dengan teliti:

Andaikata sudut putar $\alpha = \varepsilon' \cdot M'$ atau dengan kata lain, sudut putar α adalah perbandingan dengan bagian momen pada batang 2. Ukuran jepitan ε' adalah sudut pada ujung atas 2 atas momen $M' = 1$.

Pendapat ini bisa digunakan juga pada batang-batang lainnya. Ukuran jepitan menentukan daya pencegah terhadap putaran oleh momen pada batang 1.

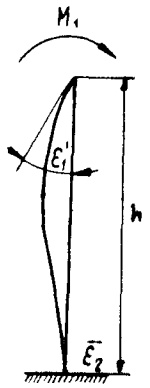
Ukuran dan besarnya ukuran jepitan pada hal ini hanya tergantung pada momen lembam I, modul elastis E dan macam tumpuan pada ujung bawah. Atas dasar ini maka disebut **ukuran jepitan sendiri.**

Kebalikan dengan ukuran jepitan pada batang 1 yang hanya tergantung pada momen lembam I, modul elastis E dan macam tumpuan pada ujung bawah batang-batang 2 s/d 4, dan bukan pada momen lembam I dan modul elastis E sendiri. Atas dasar ini maka disebut **ukuran jepitan asing.**

Perhitungan ukuran jepitan sendiri

1. *Jepitan pada ujung bawah yang sudah diketahui:*

a. pada ujung bawah sebagai jepitan elastis berlaku persamaan elastis berikut:



Gambar 6. 2. 4. b.

$$\alpha = M_1 \cdot \alpha_1 + M_2 \cdot \alpha_2 \qquad 1.$$

$$\beta = M_1 \cdot \beta_1 + M_2 \cdot \beta_2 = -\bar{\varepsilon}_2 \cdot M_2 \qquad 2.$$

dari 2 : $M_1 \cdot \beta_1 = -M_2 (\bar{\varepsilon}_2 + \beta_2)$

diisi dalam 1. :

$$\alpha = M_1 \cdot \alpha_1 - M_1 \cdot \frac{\beta \cdot \alpha_2}{\beta_2 + \varepsilon_2}$$

untuk $M_1 = 1$: $\alpha = \varepsilon_1$; $\beta_1 = \alpha_2$; $\beta_2 = \alpha_1$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \bar{\varepsilon}_2}} \qquad (6.40.)$$

b. pada ujung bawah sebagai jepitan yang kaku berlaku persamaan elastis berikut:

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \varepsilon_2} \quad ; \quad \varepsilon_2 = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{h}{6EI} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{h}{3EI} \quad \text{dan selanjutnya:} \quad \boxed{\varepsilon_1 = \frac{h}{4EI}} \qquad (6.41.)$$

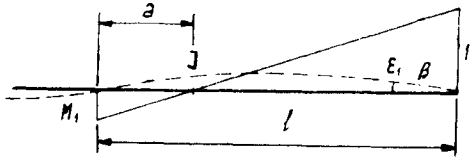
c. pada ujung bawah sebagai engsel berlaku persamaan elastis berikut:

$\bar{\varepsilon}_2 = \infty \quad \varepsilon_1 = \alpha_1$ dan selanjutnya:

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{h}{3EI}} \qquad (6.42.)$$

2. *Titik potong pada ujung bawah yang sudah diketahui:*

a. pada ujung bawah sebagai jepitan elastis berlaku persamaan elastis berikut:



Gambar 6. 2. 4. c.

$$\beta_0 = \beta_0 + M_1 \cdot \beta_1 + M_2 \cdot \beta_2$$

$M_1 = 1$ $\beta_0 = 0$ (karena tidak ada beban)

$$M_2 = -1; M_1 = \frac{a}{l-a} \text{ dan } \varepsilon_1 = -\beta$$

$$\beta_2 = \frac{l}{3EI} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{l}{6EI} \quad \text{dan selanjutnya:} \quad \boxed{\varepsilon_1 = \beta_2 - \frac{a}{l-a} \cdot \beta_1} \qquad (6.43.)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{l}{3EI} - \frac{a}{l-b} \cdot \frac{l}{6EI} \quad \text{dan selanjutnya:} \quad \boxed{\varepsilon_1 = \frac{l}{6EI} \cdot \frac{2b-3a}{l-a}} \qquad (6.44.)$$

b. pada ujung bawah sebgai jepitan yang kaku berlaku persamaan elastis berikut:

$$\varepsilon_1 = \beta_2 - \frac{a}{l-a} \cdot \beta_1 \qquad \beta_2 = \frac{h}{3EI} \; ; \beta_1 = \frac{h}{6EI} \qquad \varepsilon_1 = \frac{h}{3EI} - \frac{\frac{l}{3}}{l - \frac{l}{3}} \cdot \frac{h}{6EI}$$

$$\downarrow$$

$$a = \frac{l}{3}$$

dan selanjutnya: [lihat juga rumus (6. 41.)]

$$\underline{\varepsilon_1 = \frac{h}{4EI}}$$

c. pada ujung bawah sebagai engsel berlaku persamaan elastis berikut:

$$\varepsilon_1 = \frac{h}{3EI} - \left(\frac{0}{l.0} \cdot \frac{h}{6EI}\right) \rightarrow \underline{\varepsilon_1 = \frac{4}{3EI}}$$

[lihat juga rumus (6. 42.)]

Perhitungan ukuran jepitan asing dan pembagian momen pada titik simpul

Persamaan momen pada titik simpul adalah:

$M = M' + M'' + M'''$ (1)

oleh karena semua berputar dengan sudut α, maka dapat dikatakan:

$$\alpha = M \cdot \bar{\varepsilon}_1 = M' \cdot \varepsilon' = M'' \cdot \varepsilon'' = M''' \cdot \varepsilon''' \qquad (2)$$

$$M' = \frac{M \cdot \bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon'} \quad ; \quad M'' = \frac{M \cdot \bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon''}$$

hasil ini dimasukan ke dalam (1):

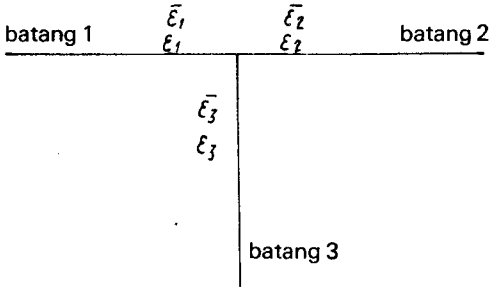
$$M = M \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon'} + M \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon''} + M \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon'''}$$

$$\frac{1}{\bar{\varepsilon}_1} = \frac{\varepsilon'' \cdot \varepsilon''' + \varepsilon' \cdot \varepsilon''' + \varepsilon' \cdot \varepsilon''}{\varepsilon' \cdot \varepsilon'' \cdot \varepsilon'''} \rightarrow \bar{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon' \cdot \varepsilon'' \cdot \varepsilon'''}{\varepsilon'' \cdot \varepsilon''' + \varepsilon' \cdot \varepsilon'' + \varepsilon' \cdot \varepsilon} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon'} + \frac{1}{\varepsilon''} + \frac{1}{\varepsilon'''}} \qquad (6.45)$$

Hasil ini melihatkan, bahwa kebalikan ukuran jepitan asing ialah jumlah kebalikan ukuran jepitan sendiri.
Kita tadi sudah melihat bahwa $M' = M \cdot \bar{\varepsilon}_1/\varepsilon'$ dan $M' = M \cdot \bar{\varepsilon}_1/\varepsilon''$
Bisa dikatakan bagian momen M', M'' dsb. bisa ditentukan dengan momen yang dikalikan dengan satu perbandingan. Perbandingan ini kita tentukan dengan μ (koefisien distribusi).
Artinya: ukuran jepitan asing pada batang yang dibebani dibandingkan dengan ukuran jepitan sendiri pada batang yang tidak dibebani.
Pada dua batang selalu ada dua perbandingan μ (koefisien distribusi), dengan memperhatikan batang yang mana yang dibebani. Sebagai keterangan, koefisien distribusi μ selalu diberi tanda panah seperti terlihat pada contoh berikut.

Contoh perhitungan koefisien distribusi μ.



$\overrightarrow{\mu_2} = \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon_2}$ (batang 1 yang dibebani)

$\overleftarrow{\mu_1} = \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\varepsilon_1}$ (batang 2 yang dibebani)

$\overrightarrow{\mu_3} = \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon_3}$

$\overleftarrow{\mu_1} = \frac{\bar{\varepsilon}_3}{\varepsilon_1}$ dsb.

Gambar 6. 2. 4. d.

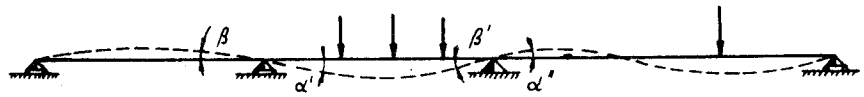
Dengan rumus yang tadi (6. 45.) digunakan untuk menghitung ukuran jepitan asing, kita bisa menentukan μ hanya dengan menggunakan ukuran jepitan sendiri seperti terlihat pada rumus berikut:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} \qquad \mu_2 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}$$

6. 3. Sistim titik potong pada balok terusan

6. 3. 1. Pengetahuan dasar

Sistim atau konstruksi balok terusan terjadi kalau suatu balok lurus menumpu tiga kali atau lebih. Balok terusan di atas tumpuan itu boleh berputar bebas akan tetapi tumpuan itu menjadi kaku, dengan maksud agar tidak bisa turun atau naik tempatnya. Lihat juga bab 7. 2. 1. (penurunan tumpuan pada balok terjepit). Pada konstruksi bangunan rumah syarat atau ketentuan ini biasanya boleh digunakan.

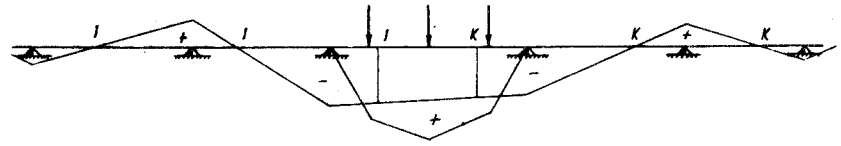


Gambar 6. 3. 1. a.

Sebagai sistim dasar kita memilih beberapa balok tunggal dengan momen tumpuan yang disuperposisi pada sistim dasar.
Persamaan elastis dengan pengertian bahwa garis elastis berjalan harmonis, adalah:

$$\beta = -\alpha' \qquad \beta' = -\alpha''$$

Atas dasar pengetahuan ini kita langsung bisa menentukan sebagai persamaan elastis syarat persamaan tiga momen (lihat bab. 6. 4.) secara analitis atau bisa juga menggunakan cara grafis.



Gambar 6. 3. 1. b.

Kita memikirkan balok terusan hanya menerima beban pada satu bagian antara dua tumpuan sebagai balok terjepit elastis dengan:

$$\alpha = -\varepsilon_1 . M_1 \qquad \beta = -\varepsilon_2 . M_2$$

Sekarang semua bagian balok terusan sebelah kiri dari bagian yang kita memperhatikan adalah suatu sistim yang terjepit sebelah kiri dengan momen sebelah kanan seperti dibicarakan pada bab 6. 1. 4. (balok terjepit sebelah). Titik momen nol ada pada titik potong *J*.
Pada bagian balok terusan yang sebelah kanan dari bagian yang kita memperhatikan adalah suatu sistim yang terjepit sebelah kanan dengan momen sebelah kiri dan titik momen nol ada pada titk potong *K*.
Dengan cara ini ditentukan bagian per bagian dari balok terusan yang diperhitungkan. Sesudah ditentukan semua diagram momen pada semua bagian balok terusan tinggal disuperposisi saja.

6. 3. 2. Menentukan titik potong

Penentuan secara analitis:

Ukuran jarak *a* dan *b* untuk titik potong *J* dan *K* pada balok dengan momen lembam *I* tetap, telah kita tentukan pada bab 6. 2. 2. dan 6. 2. 3.

Rumus-rumusnya ialah seperti berikut:

1. pada balok yang terjepit elastis:

$$a = \frac{l}{3 + \frac{6\,E\,I \cdot \varepsilon_1}{l}}$$

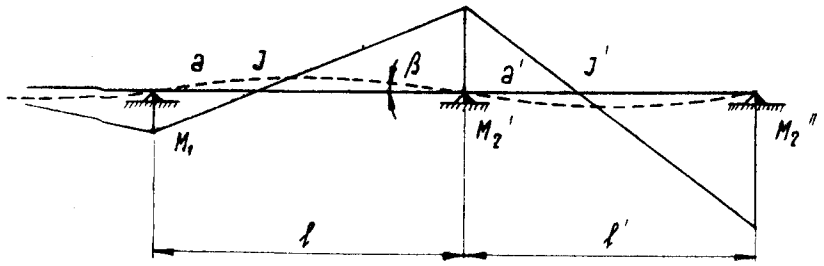
$$b = \frac{l}{3 + \frac{6\,E\,I \cdot \varepsilon_2}{l}}$$

2. pada balok terjepit:

$$a = b = \frac{l}{3}$$

3. pada balok tunggal dengan tumpuan yang bebas pada putaran: $a = b = 0$

Ukuran jarak a' dan b' untuk titik potong berikutnya J' dan K' pada balok dengan momen lembam I tetap, kita menentukan atas dasar rumus (6. 30.) rumus-rumus berikut:



Gambar 6. 3. 2. a.

1. pada balok yang terjepit elastis:

l' lebar bentang dari bagian yang diperhatikan

l lebar bentang bagian kiri dari l'

l' lebar bentang dari bagian yang diperhatikan

l lebar bentang bagian kanan dari l'

$$a' = \frac{l'}{3 + \frac{l}{l'}\left(2 - \frac{a}{l - a}\right)}$$

$$b = \frac{l'}{3 + \frac{l}{l'}\left(2 - \frac{b}{l - b}\right)} \qquad (6.46.)$$

2. pada balok terjepit:

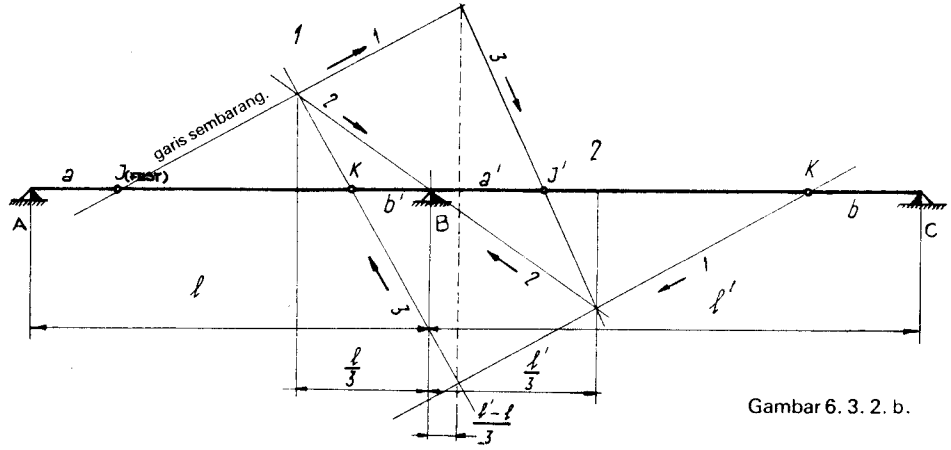
$$a' = \frac{l'}{3 + 1{,}5\,\frac{l}{l'}} \quad ; \quad b' = \frac{l'}{3 + 1{,}5\,\frac{l}{l'}} \qquad (6.47.)$$

3. pada balok tunggal dengan tumpuan yang bebas pada putaran:

$$a' = \frac{l'}{3 + \frac{2l}{l'}} \quad ; \quad b = \frac{l'}{3 + \frac{2l}{l'}} \qquad (6.48.)$$

Penentuan secara grafis:

Cara grafis hanya boleh dilakukan pada balok dengan momen lembam I tetap.

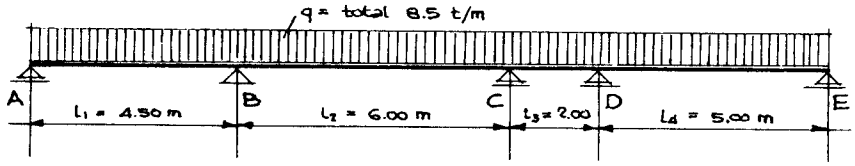


Gambar 6. 3. 2. b.

6. 3. 3. Gaya-gaya dan momen pada balok terusan

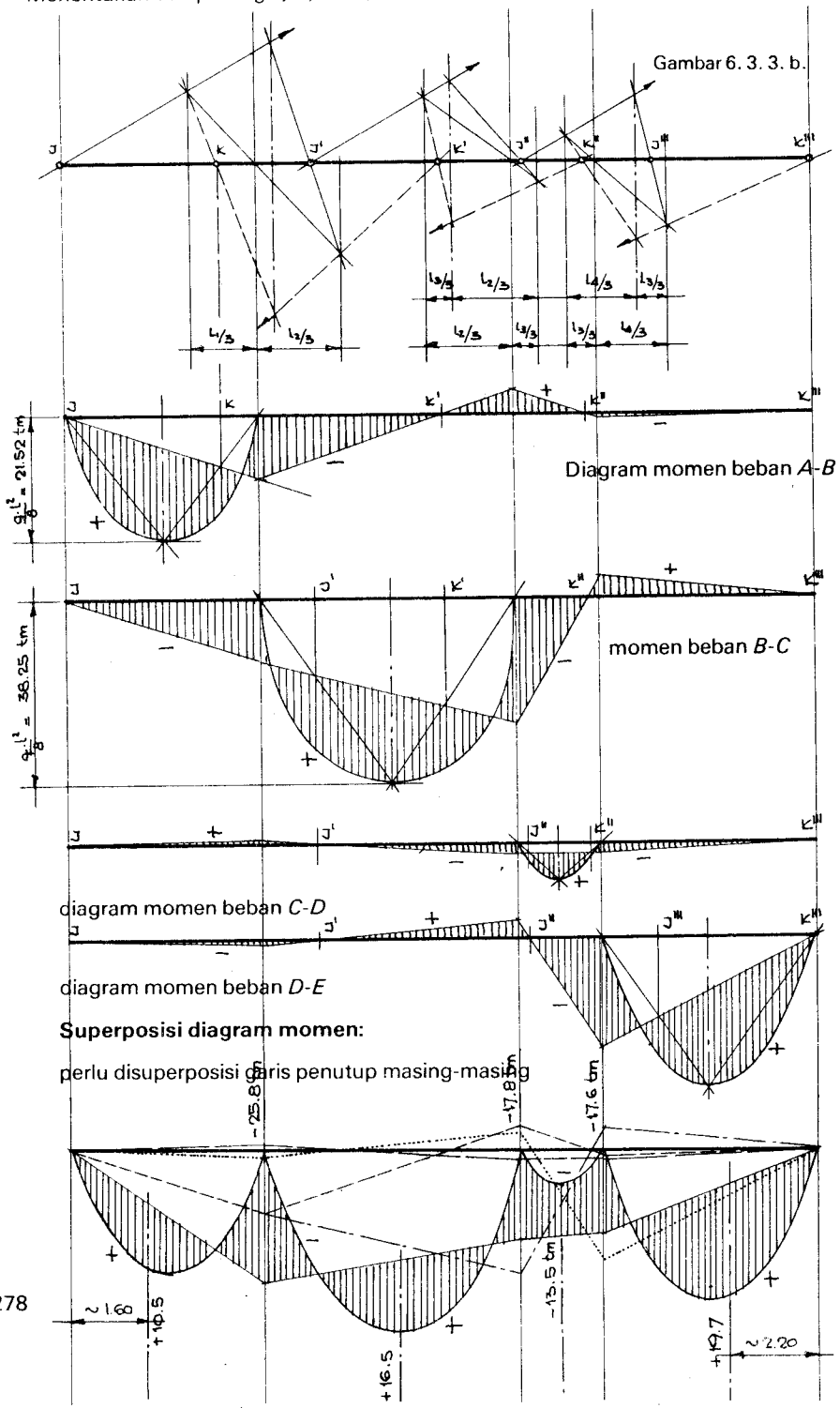
Contoh 1:

Pada balok terusan menurut gambar berikut (6. 3. 3. a.) dengan beban merata 8.5 t/m ditentukan momen-momen dan diagram masing-masing momen dengan superposisinya.



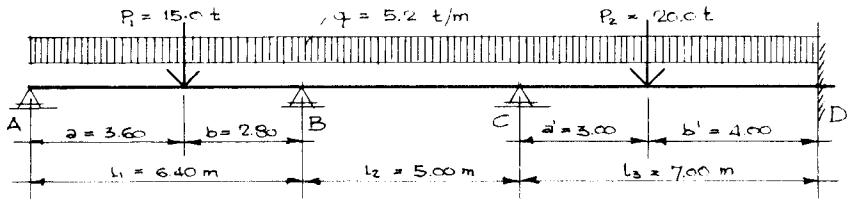
Gambar 6. 3. 3. a.

Menentukan titik potong J, J', dsb., dan K, K' dsb.:



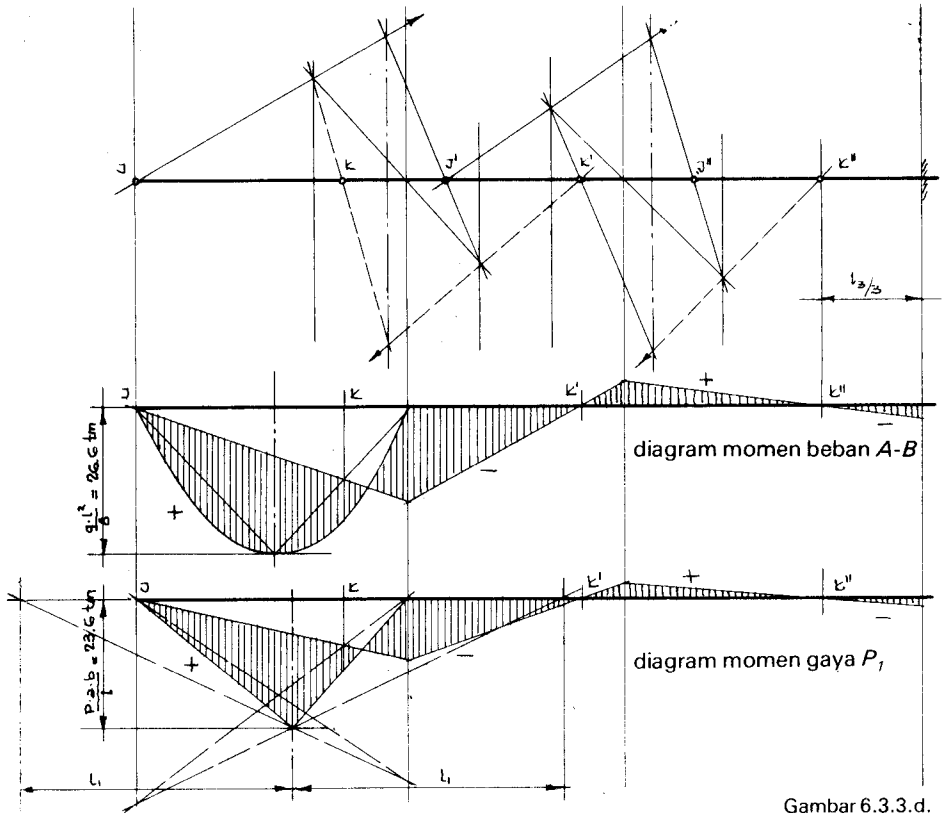
Contoh 2:

Pada balok terusan menurut gambar berikut (6.3.3.c.) dengan beban merata $q = 5.2\,t/m$ dan gaya-gaya $P_1 = 15.0\,t$ dan $P_2 = 20.0\,t$ ditentukan momen-momen dengan masing-masing diagram momen dan superposisinya dan diagram gaya lintang dan reaksi pada masing-masing tumpuan.

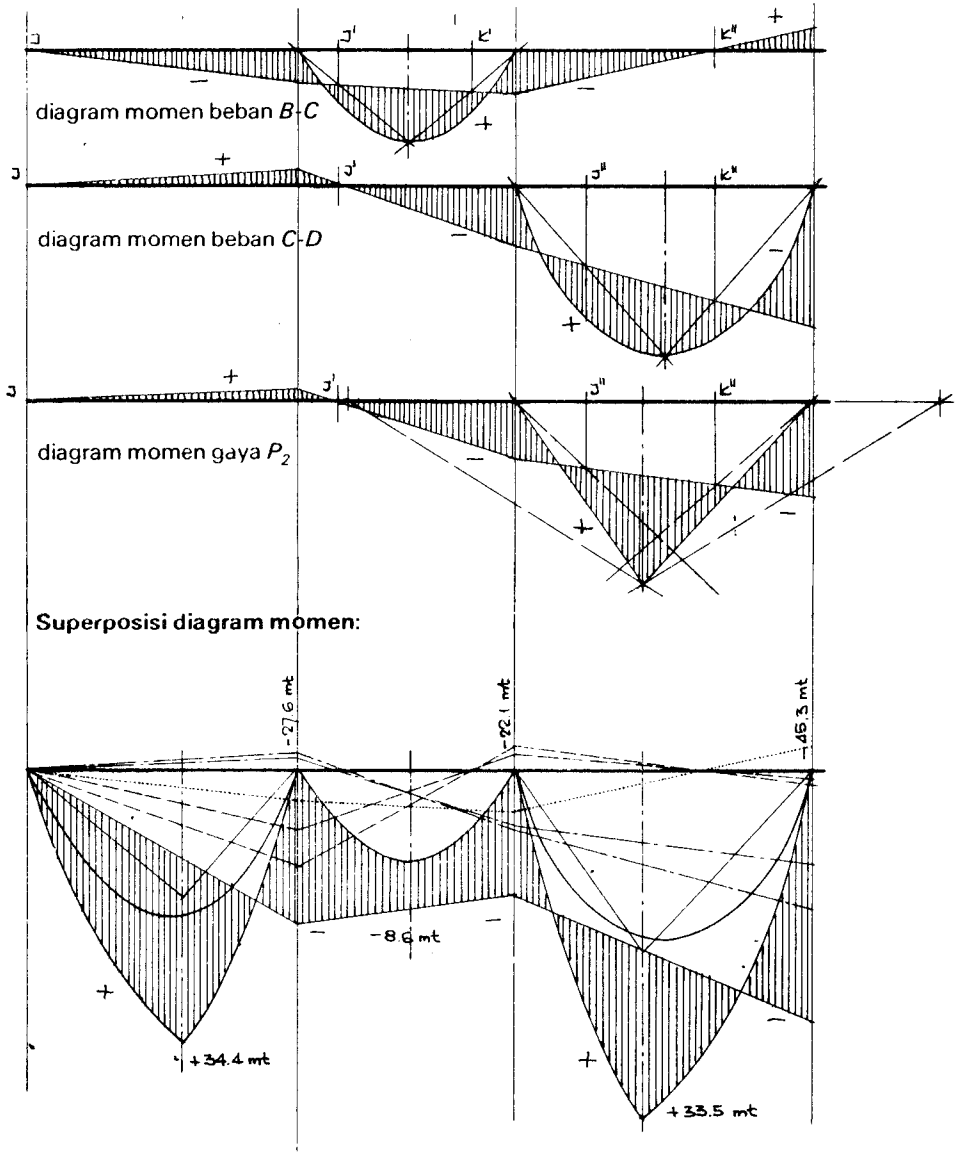


Gambar 6.3.3.c.

Menentukan titik potong J, J', J'' dsb. dan K, K', K'' dsb.:

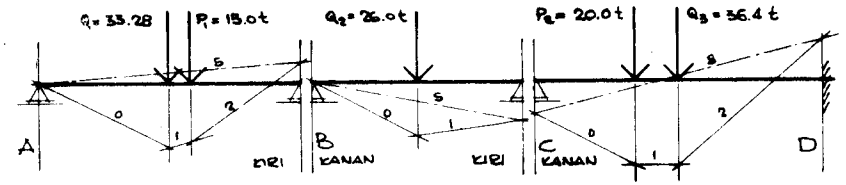


Gambar 6.3.3.d.

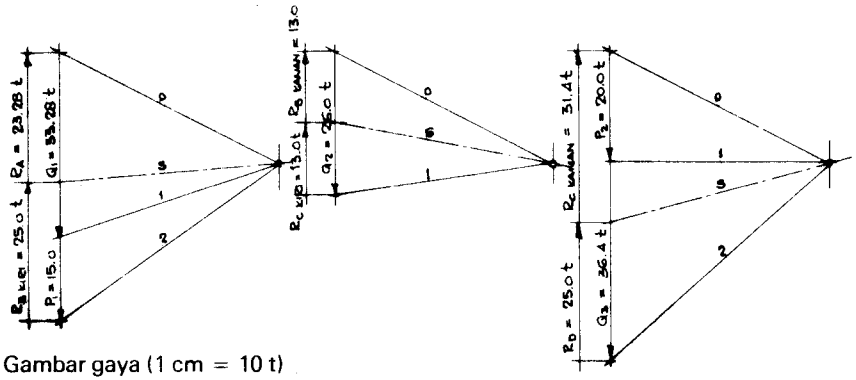


Gambar 6.3.3.e.

Menentukan masing-masing reaksi tumpuan secara grafis:



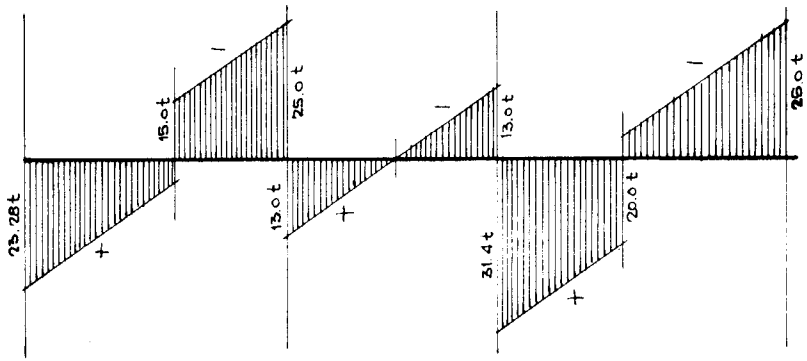
Gambar situasi (dibagi sebagai 3 balok tunggal) Q = resultante q pada masing-masing bagian.



Gambar gaya (1 cm = 10 t)

Gambar 6.3.3.f.

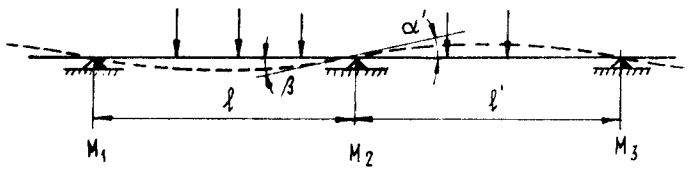
Menentukan diagram gaya lintang:
Dengan bantuan masing-masing reaksi tumpuan, kita dengan mudah bisa menggambar diagram gaya lintang seperti berikut:



Gambar 6.3.3.g.

6. 4. Syarat persamaan tiga momen (Clapeyron).

Kita perhatikan dua bagian l dan l' yang berturut-turut pada suatu balok terusan:



Gambar 6. 4. a.

Persamaan elastis yang berlaku pada tiap-tiap tumpuan adalah:

$$\beta = \beta_0 + M_1 \cdot \beta_1 + M_2 \cdot \beta_2$$

$$\alpha' = \alpha_0' + M_2 \cdot \alpha_1' + M_3 \cdot \alpha_2'$$

dan oleh $\beta + \alpha' = 0$ kemudian kita dapat:

$$M_1 \cdot \beta_1 + M_2(\beta_2 + \alpha_1') + M_3 \cdot \alpha_2' + \beta_0 + \alpha_0' = 0$$

Pada persamaan elastis ini ada tiga nilai yang belum diketahui, yaitu tiga momen pada tiga tumpuan yang berturut-turut. Oleh karena itu persamaan elastis ini boleh dinamakan persamaan tiga momen atau dalil tiga momen, ditemukan oleh *Clapeyron* pada tahun 1857.
Persamaan tiga momen ini berlaku untuk semua kemungkinan seperti momen lembam I tidak tetap, macam-macam gaya dan beban dan macam-macam lebar bentang (l dan l'tidak sama).
Pada balok terusan dengan I tetap, dan dengan menggunakan nilai sudut putar tumpuan α dan β yang sudah diketahui dapat kita tentukan:

$$M_1 \cdot \frac{l}{6EI} + M_2\left(\frac{l}{3EI} + \frac{l'}{3EI}\right) + M_3 \cdot \frac{l'}{6EI} = -\alpha_0' - \beta_0$$

atau pada balok terusan dengan momen lembam I tidak tetap:

$$M_1 I \cdot \frac{I_c}{l} + 2M_2 \cdot \left(l \cdot \frac{I_c}{l} + l' \cdot \frac{I_c}{l}\right) + M_3 l' \frac{I_c}{l} = -6E\alpha_0' \frac{I_c}{l} - 6E\beta_0 \frac{I_c}{l}$$

Kita melihat, bahwa perbandingan momen lembam harus ditentukan demikian rupa, sehingga I_c menjadi momen lembam suatu bagian sembarang pada balok terusan ini dan I menjadi momen lembam bagian balok terusan yang lain masing-masing.
Dalam persamaan tiga momen ini bagian kanan menjadi bagian beban oleh karena hanya bagian ini yang mengalami perubahan oleh beban pada balok terusan.

Untuk memudahkan perhitungan, maka biasanya digunakan kependekan-kependekan berikut:

I_c sebagai $I \cdot \frac{I_c}{l}$ $\quad$ $\mathfrak{L}$ sebagai $\frac{6E}{l'} \cdot \alpha_o'$

I_c' sebagai $I \cdot \frac{I_c}{l}$ $\quad$ $\mathfrak{R}$ sebagai $\frac{6E}{l} \cdot \beta_o$

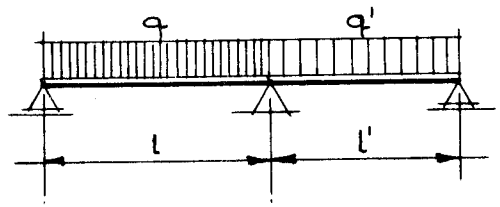
Persamaan tiga momen menurut *Clapeyron* kemudian kita tentukan sebagai:

$$M_1 I_c + 2M_2(I_c + I_c') + M_3 I_c' = -\mathfrak{R} \cdot I_c - \mathfrak{L} \cdot I_c' \qquad (6.49.)$$

Bagian beban $\mathfrak{R}$ dan $\mathfrak{L}$ ini pada umumnya dapat kita tentukan menurut tabel I. 2. 12. Tabel-tabel untuk menentukan bagian beban pada syarat persamaan tiga momen, pada lampiran.

Bagian beban pada beberapa balok terusan yang sering timbul:

1. *Balok terusan dengan beban merata:*



Gambar 6. 4. b.

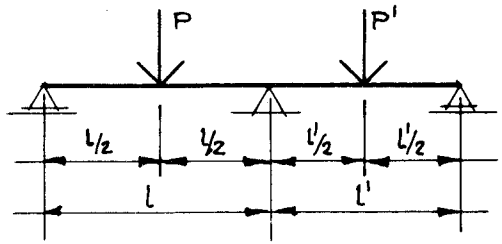
$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI}$$

dan kemudian dapat kita tentukan bagian beban sebagai:

$$\mathfrak{L} = \frac{6E}{l'} \alpha_0' = \frac{q'l'^2}{4}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{6E}{l} \beta_0 = \frac{ql^2}{4}$$

2. *Balok terusan dengan gaya pusat:*

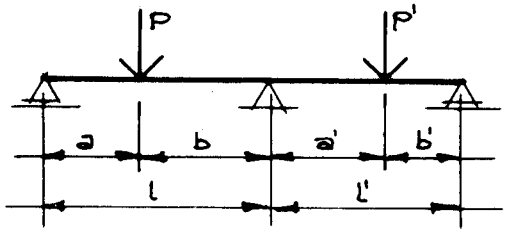


Gambar 6. 4. c.

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{P \cdot l^2}{16\,E\,I} \qquad \text{dan kemudian}$$

$$\mathfrak{L} = \frac{3}{8} \cdot P' \cdot l' \qquad \text{dan} \qquad \mathfrak{R} = \frac{3}{8} \cdot P \cdot l \cdot$$

3. Balok terusan dengan satu gaya sembarang:



Gambar 6. 4. d.

$$\beta_0 = \frac{P \cdot a \cdot b}{6\,l \cdot E\,I}(a + l) \quad \text{dan} \quad \alpha'_0 = \frac{P' \cdot a' \cdot b'}{6\,l' \cdot E\,I}(b' + l')$$

dan kemudian dapat kita tentukan bagian beban sebagai:

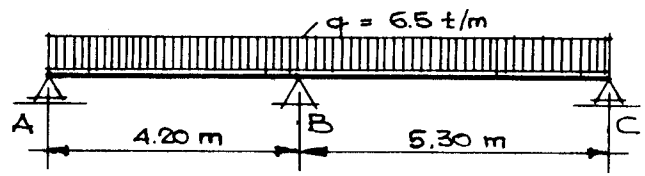
$$\mathfrak{L} = \frac{6\,E}{l'} \cdot \alpha_0 = \frac{P' \cdot a' \cdot b'}{l'^2}(b' + l')$$

$$\mathfrak{R} = \frac{6E}{l} \cdot \beta_0 = \frac{P \cdot a \cdot b}{l^2}(l + a)$$

4. Balok terusan dengan bentuk beban yang lain bisa dilihat pada tabel I. 2. 12. pada lampiran.

Contoh:

Pada balok terusan menurut gambar berikut (6. 4. e.) dengan beban merata q = *6. 5 t/m* ditentukan momen tumpuan *B* dengan bantuan syarat persamaan tiga momen menurut Clapeyron. Selanjutnya kita menentukan tumpuan masing-masing untuk menggambar diagram gaya lintang. (Momen lembam / tetap).



Gambar 6. 4. e.

Menentukan momen:

$$M_{01} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{6.5 \cdot 4.2^2}{8} = 14.3\ tm$$

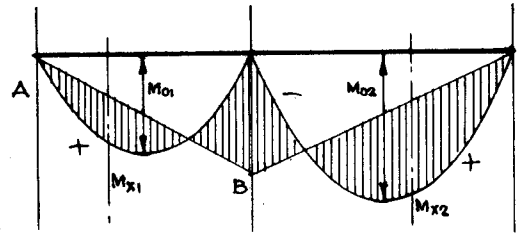
$$M_{02} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{6.5 \cdot 5.3^2}{8} = 22.8\ tm$$

$$M_B \rightarrow \underbrace{M_1 l}_{\downarrow\ 0\ =\ 0} + \underbrace{2M_2(l + l')}_{4.2 + 5.3\ =\ 9.5} + \underbrace{M_3 l'}_{\downarrow\ 0\ =\ 0} = \underbrace{-\mathfrak{R}\,l - \mathfrak{L}\,l'}_{-\frac{q \cdot l^2}{4} l - \frac{q' \cdot l'^2}{4} l'}$$

$$\underbrace{2 \cdot M_2 \cdot (9.5)}_{} \qquad \underbrace{-\frac{6.5 \cdot 4.2^2}{4} 4.2 - \frac{6.5 \cdot 5.3^2}{4} 5.3}_{= 362.3}$$

Momen tumpuan B (M_2) = $\mathbf{M_B = -19.0}$ **tm**

Diagram momen:



Gambar 6. 4. f.

Menentukan masing-masing reaksi tumpuan:

$$R_A = \frac{q \cdot l}{2} - \frac{M_B}{l} = \frac{6.5 \cdot 4.2}{2} - \frac{19.0}{4.2} = 9.2\ \text{t}$$

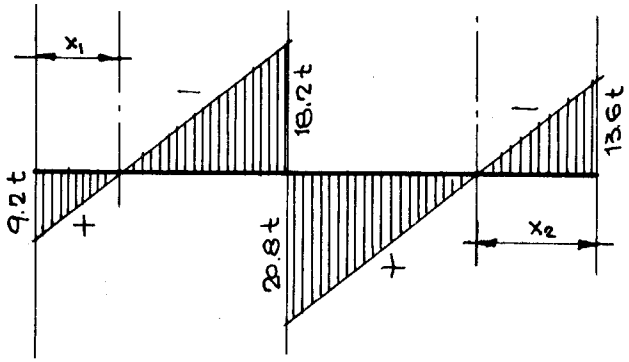
$$R_{B\,kiri} = \frac{q \cdot l}{2} + \frac{M_B}{l} = \frac{6.5 \cdot 4.2}{2} + \frac{19.0}{4.2} = 18.2\ \text{t}$$

$$R_{B\,kanan} = \frac{q \cdot l'}{2} + \frac{M_B}{l'} = \frac{6.5 \cdot 5.3}{2} + \frac{19.0}{5.3} = 20.8\ \text{t}$$

$$R_C = \frac{q \cdot l'}{2} - \frac{M_B}{l'} = \frac{6.5 \cdot 5.3}{2} - \frac{19.0}{5.3} = 13{,}6\ \text{t}$$

$$R_B = R_{B\,kiri} + R_{B\,kanan} = 18.2 + 20.8 = 39.0\ \text{t}$$

Dengan bantuan reaksi tumpuan masing-masing kita bisa menggambar diagram gaya lintang seperti berikut:



Gambar 6. 4. g.

Pada tempat gaya lintang menjadi nol (x_1 dan x_2) kita bisa menentukan momen maximal M_{x1} dan M_{x2} menurut rumus (6.26.)

$$x_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{9.2}{6.5} = +\ 1.42\ m; \qquad M_{x1} = \frac{R_A^2}{2q} = \frac{9.2^2}{13.0} = +\ 6.5\ tm$$

$$x_2 = \frac{R_c}{q} = \frac{13.6}{6.5} = +\ 2.09\ m; \qquad M_{x2} = \frac{R_c^2}{2q} = \frac{13.6^2}{13.0} = +\ 14.2\ tm$$

6. 5. Sistim Cross pada balok terusan

6. 5. 1. Pengetahuan dasar

Jikalau pada suatu balok terjepit elastis kita mengetahui nilai momen jepitan. Kita dengan mudah bisa menghitung gaya-gaya yang timbul, menurut rumus (6.15.) dan (6.16.) misalnya:

$$M = M_0 + M_1 \cdot \frac{x'}{l} + M_2 \cdot \frac{x}{l}$$

$$Q = Q_0 + \frac{M_2 - M_1}{l}$$

Padahal jepitan kaku momen jepitan dapat dihitung dengan cepat atau dapat diambil dari tabel-tabel (lihat lampiran 9.2.6.).

Sistim Cross menggunakan keuntungan ini dengan ketentuan, bahwa pada suatu balok terusan yang semua bagian-bagian berada dalam keadaan terjepit kaku sebelah-menyebelah. Momen jepitan yang akan timbul pada tumpuan-tumpuan pada umumnya bukan menjadi nol, melainkan timbul suatu momen jepitan pada tiap jepitan yang ditentukan. Dengan sistim Cross kita sekarang melepaskan satu demi satu jepitan dan momen jepitan yang timbul akan disalurkan pada balok terusan.

Cara ini dapat dilakukan sampai pada tiap-tiap titik simpul atau tumpuan momen jepitan menjadi nol, atau hampir nol (distribusi momen).

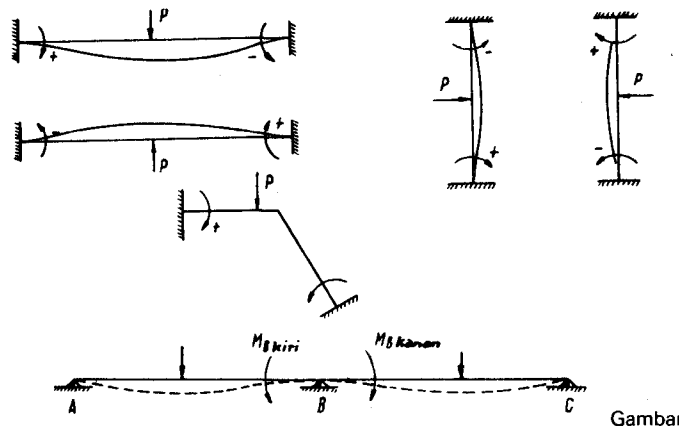
6. 5. 2. Perjanjian tanda pada sistim Cross

Perjanjian tanda pada sistim Cross hanya digunakan untuk melakukan distribusi momen. Pada semua perhitungan dan penentuan yang lain kita menggunakan perjanjian tanda yang sudah diketahui dan yang ditentukan pada bab 1.6.3.

Perjanjian tanda pada sistim Cross adalah:

> Momen jepitan adalah positif (+) jikalau momen jepitan akan berputar pada suatu titik simpul searah jarum jam, dan menjadi negatif (—) jikalau akan berputar berlawanan arah jarum jam.

Misalnya:



Gambar 6.5.2.a.

Dengan menggunakan perjanjian tanda pada sistim Cross ini, pada balok terusan misalnya momen pada satu tumpuan sebelah kiri dan sebelah kanan tidak mempunyai tanda yang sama, melainkan mereka bertanda (+) dan (—). Oleh karena itu cara distribusi momen baru mungkin kalau jumlah momen suatu titik simpul menjadi nol.

Akan tetapi untuk menentukan diagram momen misalnya, kita harus melakukan perjanjian tanda dari bab 1.6.3.

6. 5. 3. Momen jepitan

Pada balok terusan dengan lembam I tetap dan dengan beban sembarang momen jepitan boleh ditentukan seperti berikut:

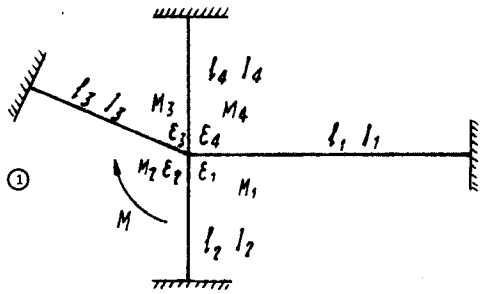
$$M_1 = -\,(2\alpha_0 - \beta_0)\,\frac{2EI}{l}$$

$$M_2 = -\,(2\beta_0 - \alpha_0)\,\frac{2EI}{l}$$

Sesudah sudut putar tumpuan α_o dan β_u ditentukan, momen jepitan pada balok terjepit kaku bisa dihitung atau diambil pada tabel-tabel (lihat lampiran 9.2.6.).

6. 5. 4. Momen pada titik simpul

Jikalau kita menjumlahkan semua momen jepitan pada suatu titik simpul, jumlah momen jepitan tidak menjadi nol, melainkan jumlah itu menjadi *resultante momen jepitan* (momen residu). Selanjutnya kita melepaskan titik simpul yang kita perhatikan dengan jepitan kaku pada titik simpul sekeliling. Sebagai keseimbangan pada titik simpul yang kita perhatikan kita pasang sekarang satu *momen distribusi* dengan nilai yang sama dengan resultante momen jepitan tetapi dengan tanda (+) atau (—) terbalik. Oleh akibat ini momen *distribusi (M_{ik} atau M)* titik simpul akan berputar dengan sudut α seperti sudah ditentukan pada bab 6.2.4. (macam-macam jepitan).



Gambar 6.5.4.a.

Pada bab macam-macam jepitan itu kita tentukan ukuran jepitan ε' sebagai sudut putar α dengan momen $M = 1$ pada ujung batang itu. Oleh karena pada titik simpul yang kita perhatikan semua batang berputar dengan sudut α yang sama, kita bisa menulis:

$$\alpha = M_1 \cdot \varepsilon_1 = M_2 \cdot \varepsilon_2 = M_3 \cdot \varepsilon_3 \ldots\ldots = M_n \cdot \varepsilon_n$$

dan sebagai persamaaan momen pada titik simpul itu:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots M_n$$

selanjutnya:

$$M_1 : M_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

atau:

$$M_1 : M_2 : M_3 \ldots\ldots M_n = \frac{1}{\varepsilon_1} : \frac{1}{\varepsilon_2} : \frac{1}{\varepsilon_3} : \ldots\ldots \frac{1}{\varepsilon_n}$$

Ukuran jepitan ε_1 s/d ε_n pada momen lembam I yang tetap dan dengan ujung balok terjepit menjadi·

$$\frac{I_n}{4 E I_n}$$

atau:

$$M_1 : M_2 : M_3 : \ldots\ldots M_n = \frac{4 E I_1}{l_1} : \frac{4 E I_2}{l_2} : \frac{4 E I_3}{l_3} : \ldots\ldots \frac{4 E I_n}{l_n}$$

ketentuan ini boleh diperpendek lagi dengan $4E$ dengan penentuan k sebagai angka kekakuan batang seperti berikut

$$\boxed{\frac{I_1}{l_1} = k_1 \ldots\ldots \frac{I_n}{l_n} = k_n} \qquad (6.50.)$$

boleh kita katakan:

$$M_1 : M_2 : M_3 = \ldots\ldots M_n = k_1 : k_2 : k_3 : \ldots\ldots k_n$$

atau:

$$\boxed{M_1 = M \cdot \frac{k_1}{\Sigma k} \; ; \; M_2 = M \cdot \frac{k_2}{\Sigma k} \; ; \; M_3 = M \cdot \frac{k_3}{\Sigma k} \; ; \quad M_n = M \cdot \frac{k_n}{\Sigma k}} \qquad (6.51.)$$

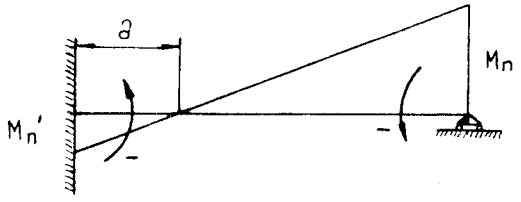
yaitu: momen distribusi M_{ik} *atau* M dapat membagi batang masing-masing menurut perbandingan angka kekakuan batang.
Sebagai koefisien distribusi μ pada titik simpul yang kita perhatikan kita boleh berkata:

$\mu_1 = \frac{k_1}{\Sigma k}$ bagi batang 1, dan

$\mu_2 = \frac{k_2}{\Sigma k}$ bagi batang 2 dsb.

6. 5. 5. Momen jepitan dan momen distribusi yang disalurkan

Momen M_n yang berada sebagai bagian momen distribusi pada batang n pada titik simpul yang kita perhatikan sebagai 'lepas' menyalurkan Momen M'_n kepada ujung batang n yang dijepit kaku.
Sebagai koefisien induksi γ kita menentukan perbandingan antara momen distribusi yang disalurkan dan dengan momen distribusi pada batang n.



$$\boxed{\gamma = \frac{M'_n}{M_n}} \qquad (6.52.)$$

Gambar 6.5.5.a.

Pada umumnya M'_n boleh diperhitungkan menurut bab 6.1.4. (balok terjepit sebelah) seperti berikut:

$$M'_n = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$$

jikalau momen lembam I tetap pada baloknya:

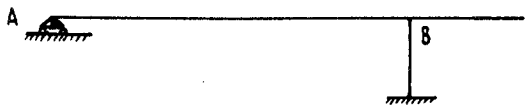
$$\alpha_0 = \frac{M_n \cdot l}{6\,E\,I} \quad ; \qquad \alpha_1 = \frac{l}{3\,E\,I}$$

dengan hasil seperti berikut:

$$M_n' = \frac{1}{2} \cdot M_n \qquad \text{atau} \qquad \gamma = \frac{1}{2} \qquad (6.53.)$$

perlu diperhatikan, bahwa tanda (+ , —) adalah sama untuk M_n dan M'_n.
Hasil ini juga bisa kita cari dengan menggunakan metode atau sistim titik potong dengan jarak titik potong a = *l*/3 seperti ditentukan pada batang yang terjepit kaku sebelah dan dengan momen lembam *I* tetap (lihat juga bab 6.2.3.).
Momen jepitan dan momen distribusi yang disalurkan harus diperhatikan nanti kalau kita akan menentukan momen jepitan pada titik simpul berikutnya.

6. 5. 6. Batang dengan engsel pada ujungnya



Gambar 6.5.6.a.

Kalau kita melihat batang *AB* yang disambung kaku pada titik *B* dan punya tumpuan rol atau engsel pada ujung *A* perhitungan dapat dimudahkan sekali kalau kita tidak memakai cara balok terjepit, melainkan langsung menggunakan ketentuan tentang momen jepitan dan momen distribusi yang disalurkan, tentang angka kekakuan batang dan tentang koefisien induksi.

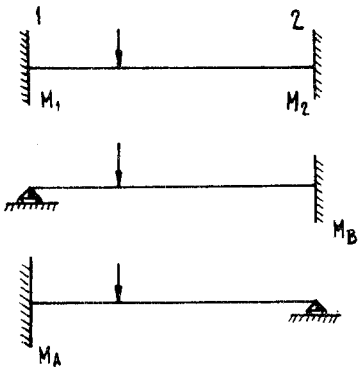
Menentukan momen jepitan:

Pada umumnya digunakan pengetahuan rumus (6.23.)

$$M_2 = -\frac{\beta_0}{\beta_2}$$

Gambar 6.5.6.b.

Akan tetapi momen jepitan pada balok terjepit sebelah bisa juga dihitung dengan menggunakan ketentuan tentang balok terjepit, misalnya:



Gambar 6.5.6.c.

$$M_B = M_2 + 0.5\,M_1$$

$$M_A = M_1 + 0.5\,M_2 \qquad (6.54.)$$

Harus diperhatikan, bahwa M_1 dan M_2 mendapat tanda (+ , —) yang sama. Momen jepitan ini sekarang bisa beraksi pada titik simpul.

Angka kekakuan k':

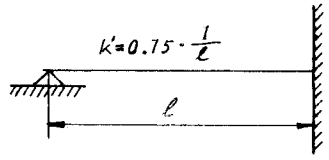
Pada distribusi momen kita harus memperhatikan juga perobahan angka kekakuan batang (*k'*) pada batang yang punya tumpuan rol atau engsel sebelah:

ukuran jepitan pada tumpuan rol menjadi: $\varepsilon_1 = \frac{l}{3\,E\,I}$

ukuran jepitan pada jepitan menjadi: $\varepsilon' = \frac{l}{4\,E\,I}$

Pada bab 6.5.4. (Momen pada titik simpul), rumus (6.50.) kita menentukan semua ukuran jepitan dengan: $\frac{l}{4EI}$

Dengan cara itu kita memudahkan perhitungan angka kekakuan batang *k*. Tetapi untuk batang yang punya tumpuan rol atau engsel sebelah kita harus memperhatikan perbandingan Σ_1 dengan Σ' yang menjadi 3/4. (angka kekakuan batang *k'*).
Pada perhitungan angka kekakuan batang *k'* kita harus menghitung kali 0,75 untuk mendapat *k'* pada batang yang punya tumpuan rol atau engsel sebelah:



$$k' = 0.75 \cdot \frac{l}{l} \qquad (6.55.)$$

Gambar 6.5.6.d.

Oleh karena tumpuan rol atau engsel tidak bisa menyalurkan momen apa pun koefisien induksi γ menjadi nol.

$$\gamma = 0 \qquad (6.56.)$$

6. 5. 7. Persiapan cara distribusi momen

1. *Menentukan nilai-nilai bagi batang masing-masing:*

$k_n = \frac{I_n}{l_n}$ ..... pada tiap-tiap batang

$\mu_n = \frac{k_n}{\Sigma k}$ ..... pada tiap-tiap titik simpul

$\gamma =$ ..... pada tiap-tiap batang

Semua nilai ini kita isi pada gambar (lihat contoh-contoh bab 6.5.9.).
Perbedaan antara sistim titik potong dengan cara distribusi momen menurut Cross adalah, bahwa dengan sistim Cross bisa digunakan momen lembam / yang berbeda pada tiap-tiap bagian balok terusan.

2. *Menentukan momen jepitan:*

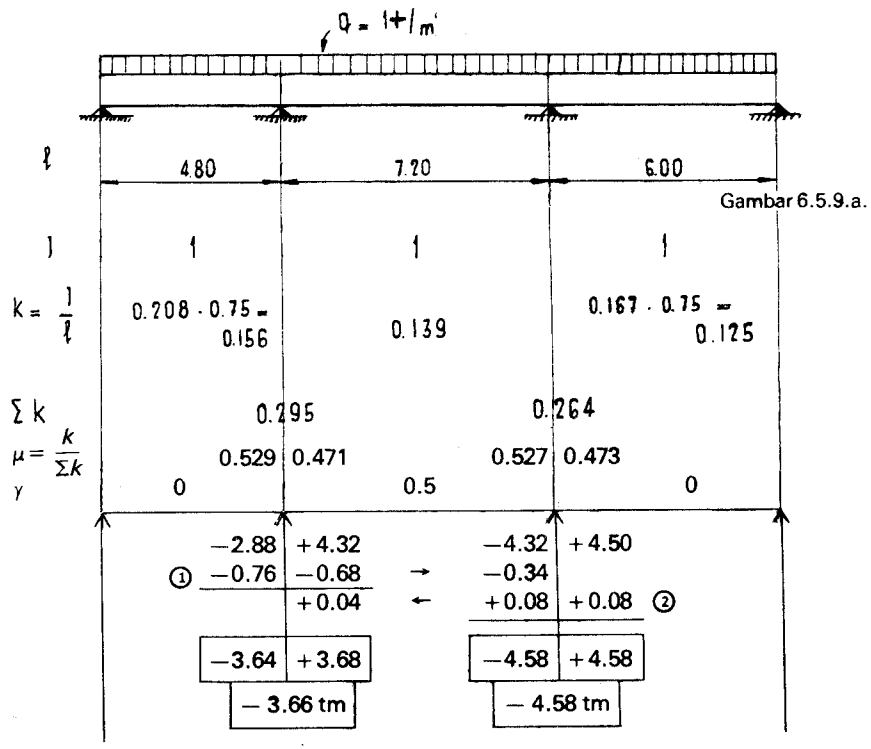
Kita menentukan momen jepitan pada balok terjepit atau balok terjepit sebelah pada tiap-tiap bagian balok terusan yang dibebani dan mengisi hasil juga bersama tanda (+ , —) pada gambar (lihat contoh-contoh pada bab 6.5.9.)

6. 5. 8. Cara distribusi momen menurut Cross

Cara distribusi momen mulai dengan resultante momen jepitan (momen residu) terbesar. Selanjutnya momen distribusi yang sama besarnya dengan resultante momen jepitan tetapi dengan tanda (+ , —) terbalik disalurkan pada batang-batang yang dihubungkan pada titik simpul itu, dan kepada titik simpul berikutnya. Momen yang disalurkan harus diperhatikan pada perhitungan momen distribusi pada titik simpul berikutnya menurut koefisien induksi. Dengan menggunakan begitu persiapan pada titik simpul itu pada permulaan tidak seimbang dan harus dikoreksi dengan perobahan momen distribusi sampai perhitungan ini cukup teliti. (Jikalau dihitung dengan tm sampai satu angka sesudah koma).
Momen pada ujung batang masing-masing sekarang boleh digunakan untuk menggambar diagram momen dengan perhatian pada perjanjian tanda yang lama (lihat bab 1.6.3.).

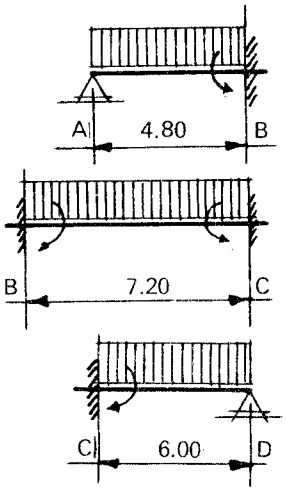
6. 5. 9. Contoh-contoh

Contoh 1:
Pada balok terusan menurut gambar berikut (6.5.9.a.) dengan beban merata *1 t/m* dan dengan momen lembam / yang tetap, ditentukan momen-momen maximal pada tumpuan dan pada bagian masing-masing. (oleh karena nilai /, jikalau momen lembam / tetap, tidak penting, karena sebenarnya hanya perbandingan, kita boleh menggunakan nilai / = 1.)



Gambar 6.5.9.a.

Perhitungan momen jepitan M_o:
(lihat juga pada tabel-tabel bab 9.2.6.)



$Momen\ A = -0$

$Momen\ B_{kiri} = -\frac{q \cdot l^2}{8} = -\frac{1 \cdot 4.8^2}{8} = -2.88$ tm

$Momen\ B_{kanan} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{1 \cdot 7.2^2}{12} = -4.32$ tm

$Momen\ C_{kiri} = Momen\ B_{kanan} = -4.32$ tm

$Momen\ C_{kanan} = -\frac{q \cdot l^2}{8} = -\frac{1 \cdot 6.0^2}{8} = -4.50$ tm

$Momen\ D = 0$

Distribusi momen menurut Cross:

① $\triangle M_B = -2.88 + 4.32 = +$ **1.44 tm**

$\triangle M_{B\,kiri} = \triangle M_B \cdot \mu_1 = -1.44 \cdot 0.529 = -0.76$ tm

$\triangle M_{B\,kanan} = \triangle M_B \cdot \mu_2 = -1.44 \cdot 0.471 = -0.68$ tm

} **− 1.44 tm**

② $\triangle M_C = -4.66 + 4.50 =$ **− 0.16 tm**

$\triangle M_{C\,kiri} = \triangle M_C \cdot \mu_2' = +0.16 \cdot 0.527 = +0.08$ tm

$\triangle M_{C\,kanan} = \triangle M_c \cdot \mu_3 = +0.16 \cdot 0.473 = +0.88$ tm

} **+ 0.16 tm**

Perhitungan momen $M_{max\,AB}$ pada bidang AB:
menurut rumus (6.26.) kita boleh menentukan $M_{max\,AB} = R_A^2/2\,q$ dengan reaksi tumpuan R_A pada tumpuan rol atau engsel, dan menurut rumus (6.17.) kita menentukan R_A itu sebagai:

$$R_A = \frac{q \cdot l}{2} - \frac{M_B}{l} = \frac{1 \cdot 4.8}{2} - \frac{3.66}{4.8} = +1.64\,t$$

$$M_{max\,AB} = \frac{R_A^2}{2q} = \frac{1.64^2}{2} = +\mathbf{1.34\ tm}$$

Perhitungan momen $M_{max\,CD}$ pada bidang CD:
menurut perhitungan momen $M_{max\,CD}$ kita tentukan:

$$R_D = \frac{q \cdot l}{2} - \frac{M_D}{l} = \frac{1 \cdot 6}{2} - \frac{4.58}{6} = +2.24\,t$$

$$M_{max\,CD} = \frac{R_D^2}{2q} = \frac{2.24^2}{2} = +\mathbf{2.50\ tm}$$

Perhitungan momen $M_{max\,BC}$ pada bidang BC:
kita boleh menggunakan rumus yang baru seperti berikut:

$$M_{max} = \frac{R_C^2}{2q} - M_C \qquad (6.57)$$

di dalam rumus ini, masing-masing bagian berarti:

R_c = Reaksi pada tumpuan dengan momen jepitan yang terkecil
M_c = Momen jepitan yang terkecil
q = beban merata

Menurut rumus (6.17.) kita bisa menentukan reaksi tumpuan R_B

$$R_B = R_{Bo} + \frac{M_1 - M_2}{l}$$

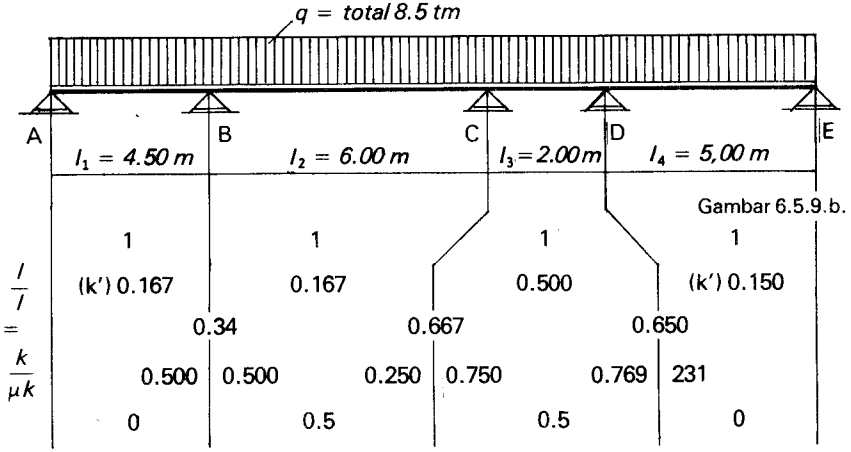
$$R_{Bo} = \frac{q.l}{2} = \frac{l \cdot 7.2}{2} = +3.6\,t$$

$$R_B = R_{Bo} + \frac{M_1 - M_2}{l} = +3.6 \frac{-3.66 + 4.58}{7.2} = +4.06\,t$$

$$M_{max\,BC} = \frac{R^2_B}{2q} - M_B = \frac{4.06^2}{2} - 3.66 = +\mathbf{4.58\ tm}$$

Contoh 2:

Pada balok terusan menurut gambar berikut (6.5.9.b.), lihat juga contoh 1 pada bab 6.3.3. kita menggunakan cara distribusi momen menurut Cross, kemudian kita menentukan semua reaksi pada masing-masing tumpuan untuk menggambar diagram gaya lintang dan menentukan maximsl pada masing-masing bidang.

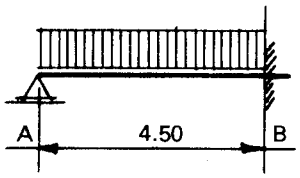


Gambar 6.5.9.b.

$l =$		1		1		1		1
$k = \frac{l}{l}$		(k') 0.167		0.167		0.500		(k') 0.150
$\Sigma k =$			0.34		0.667		0.650	
$\mu = \frac{k}{\mu k}$		0.500	0.500	0.250	0.750	0.769	231	
$\gamma =$	0		0.5		0.5		0	

	− 21.25	+ 25.50		− 25.50	+ 2.83		− 2.83	+ 26.56		
					− 9.12	←	− 18.25	− 5.48		①
		+ 3.92	←	+ 7.95	+ 23.84	→	+ 11.92			
					− 4.58	←	− 9.17	− 2.75		②
		+ 0.57	←	+ 1.14	+ 3.44	→	+ 1.72			
⑤	− 4.37	− 4.37	→	− 2.18						
		+ 0.28	←	+ 0.55	+ 1.63	→	+ 0.82			
					− 0.98	←	− 1.95	− 0.59		⑦
		+ 0.12	←	+ 0.25	+ 0.73	→	+ 0.37			
⑩	− 0.20	− 0.20	→	− 0.10	− 0.14	←	− 0.28	− 0.11		⑨
		+ 0.03	←	+ 0.06	+ 0.18	→	+ 0.09			
	− 25.82	+ 25.85		− 17.83	+ 17.83		− 17.56	+ 17.63		
		− 25.85 tm			− 17.83 tm			− 17.60 tm		

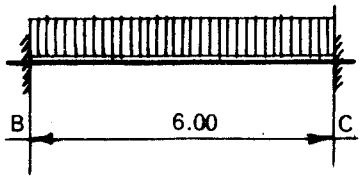
Perhitungan momen jepitan M_o:
(lihat juga pada tabel-tabel bab 9. 2. 6.)



Momen A = 0

Momen $B_{kiri} = -\frac{q.l^2}{8} = -\frac{8.5 \cdot 4.5^2}{8}$

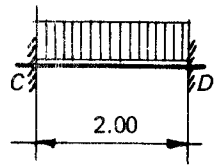
$= -21.25\ tm$

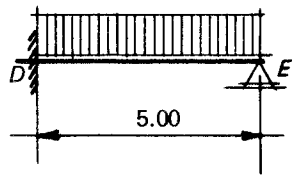


Momen $B_{kanan} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{8.5 \cdot 6.0^2}{12}$

$= -25.50\ tm$

Momen C_{kiri} = Momen B = $-25.50\ tm$





Momen $C_{kanan} = -\frac{q.l^2}{12} = -\frac{8.5 \cdot 2.0^2}{12}$

$= 2.83\ tm$

Momen D_{kiri} = Momen C = $-2.83\ tm$

Momen $D_{kanan} = -\frac{q \cdot l^2}{8} = -\frac{8.5 \cdot 5.0^2}{8}$

$= -26.56\ tm$

Momen E = 0

Distribusi momen menurut Cross:

① ΔM_D = + 26.56 − 2.83 = + **23.73 tm**

$\Delta M_{D\ kiri}$ = $\Delta M_D \cdot \mu$ = − 23.73.0.769 = − 18.25 *tm*

$\Delta M_{D\ kanan}$ = $\Delta M_D \cdot \mu$ = − 23.73 . 0.231 = − 5.48 *tm* } **− 23.73 tm**

② ΔM_C = − 25.50 − 6.29 = − **31.79 tm**

$\Delta M_{C\ kiri}$ = $\Delta M_D \cdot \mu$ = + 31.79 · 0.750 = + 23.84 tm

$\Delta M_{C\ kanan}$ = $\Delta M_c \cdot \mu$ = + 31.790.250 = + 7.95 *tm* } **+ 31.79 tm**

③ ΔM_D = **+ 11.92 tm**

$\Delta M_{D\ kiri}$ = $\Delta M_D \cdot \mu$ = − 11.92 . 0.769 = − 9.17 *tm*

$\Delta M_{D\ kanan}$ = $\Delta M_D \cdot \mu$ = − 11.92 . 0.231 = − 2.75 *tm* } **− 11.92 tm**

④ ΔM_C = **− 4.58 tm**

$\Delta M_{C\ kiri}$ = $\Delta M_C \cdot \mu$ = + 4.58 . 0.750 = + 3.44 *tm*

$\Delta M_{C\ kanan}$ = $\Delta M_c \cdot \mu$ = + 4.58 . 0.250 = + 1.14 *tm* } **+ 4.58 tm**

⑤ ΔM_B = − 21.25 + 29,99 = + **8.74 tm**

$\Delta_{B\ kiri}$ = $\Delta_B \cdot \mu$ = − 8.74 . 0.500 = − 4.37 *tm*

$\Delta M_B \cdot \mu$ = − 8.74 . 0.500 = − 4.37 *tm* } **− 8.74 tm**

dsb. .....

Menentukan masing-masing reaksi tumpuan:

$$R_A = \frac{q \cdot l^2}{2} - \frac{M_B}{l^1} = 19.13 - 5.76 = \mathbf{13.37\ t}$$

$$R_{B\,kiri} = \frac{q.l_1}{2} + \frac{M_B}{l} = 19.13 + 5.76 = 24.89\ \text{t}$$

$$R_{B\,kanan} = \frac{q.l_2}{2} + \frac{M_B - M_C}{l_1} = 25.50 + 1.35 = 26.85\ \text{t}$$

$$\Big\} \mathbf{51.74\ t}$$

$$R_{C\,kiri} = \frac{q.l_2}{2} - \frac{M_B - M_C}{l_2} = 25.50 - 1.35 = 24.15\ \text{t}$$

$$R_{C\,kanan} = \frac{q.l_3}{2} + \frac{M_C - M_D}{l_3} = 8.50 + 0.10 = 8.60\ \text{t}$$

$$\Big\} \mathbf{32.75\ t}$$

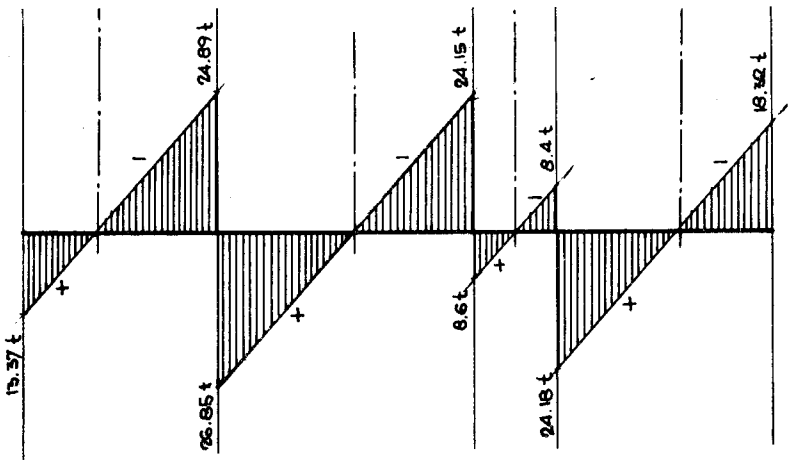
$$R_{D\,kiri} = \frac{q.l_3}{2} - \frac{M_C - M_D}{l_3} = 8.50 - 0.10 = 8.60\ \text{t}$$

$$R_{D\,kanan} = \frac{q.l_4}{2} + \frac{M_D}{l_4} = 21.24 + 2.93 = 24.18\ \text{t}$$

$$\Big\} \mathbf{32.58\ t}$$

$$R_E = \frac{q.l_4}{2} - \frac{M_D}{l_4} = 21.25 - 2.93 = \mathbf{18.32\ t}$$

Dengan hasil ini kita menggambar diagram gaya lintang:



Gambar 6. 5. 9. c.

Menentukan momen maximal pada masing-masing bagian balok:

$$M_{max\,AB} = \frac{R_A^2}{2q} = +\ \mathbf{10.52\ tm} \qquad (x_{AB} = \frac{R_A}{q} = 1{,}57\ \text{m})$$

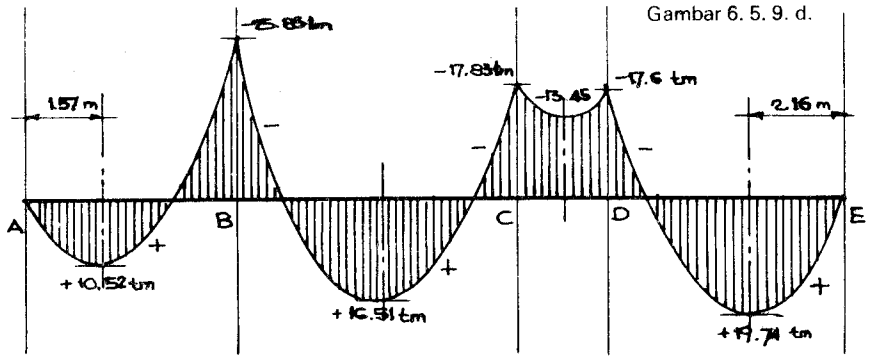
$$M_{max\,DE} = \frac{R_E^2}{2q} = +\ \mathbf{19.74\ tm} \qquad (x_{ED} = \frac{R_E}{q} = 2.16\ \text{m})$$

$$M_{max\,BC} = \frac{R_C^2}{2q} - M_C = 34.31 - 17.80 = +\ \mathbf{16.51\ tm}$$

$$M_{max\,CD} = \frac{R_D^2}{2q} - M_D = +\ 4.15 - 17.60 = +\ \mathbf{13.45\ tm}$$

Dengan hasil ini kita bisa menggambar diagram momen:

Gambar 6. 5. 9. d.

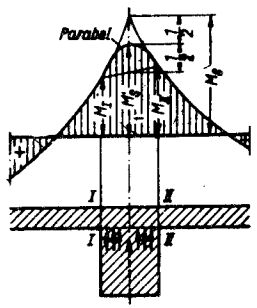


Pada contoh 2 ini kita perlu memperhatikan dengan khusus momen maximal pada tumpuan *B* yang dengan -25.85 *tm* jauh lebih besar daripada momen terbesar berikutnya (bidang *DE*, + 19.74 *tm*.) Kemungkinan untuk mengawasi kejadian ini tergantung pada bahan bangunan yang dipilih:

1. *Konstruksi beton bertulang:*

   Pada konstruksi beton bertulang ada dua kemungkinan:

a. dengan merendahkan ketinggian puncak momen pada tumpuan *B* jikalau tiang beton bertulang yang menjadi tumpuan *B* cukup lebar, kita boleh menggunakan rumus berikut:

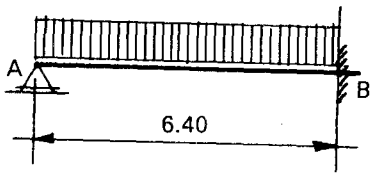


$$M_S' = M_S - \frac{M_S - \frac{M_I + M_{II}}{2}}{2} =$$

$$\boxed{M_S' = \frac{M_S}{2} + \frac{M_I + M_{II}}{4}} \qquad (6.58.)$$

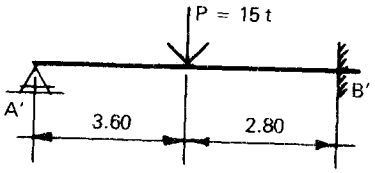
Gambar 6.5.9.e.

Perhitungan momen jepitan M_0:



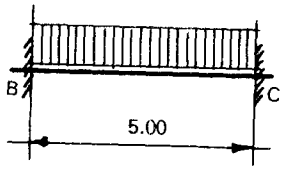
Momen A, A' = 0

Momen B_{kiri} $= -\frac{q \cdot l^2}{8} = -\frac{5.2 \cdot 6.4^2}{8} = -26.62$ tm



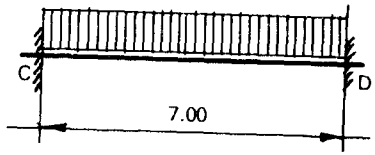
Momen B'_{kiri} $= -\frac{P \cdot a \cdot b}{2l^2}(l + a) = -\frac{15 \cdot 3.6 \cdot 28}{2 \cdot 6.4^2} \cdot 10 = -18.46$ tm

Momen B_{kiri} = **−45.08 tm**



Momen B_{kanan} $= -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{5.2 \cdot 5.0^2}{12} = -10.83$ tm

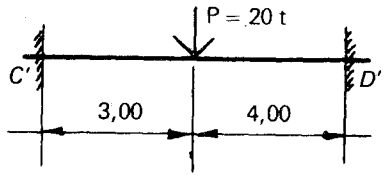
Momen C_{kiri} = Momen B_{kanan} = −10.83 tm



Momen C_{kanan} $= -\frac{q \cdot l^2}{l^2} = -\frac{5.2 \cdot 7.0^2}{l^2} = -21.23$ tm

Momen C'_{kanan} $= -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = -\frac{20 \cdot 3 \cdot 4^2}{7.0^2} = -19.59$ tm

Momen C_{kanan} = **− 40.82 tm**



Momen D = Momen C_{kanan} = −21.23 tm

Momen D' $= -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2} = -\frac{20 \cdot 3^2 \cdot 4}{7.0^2} = -14.59$ tm

Momen D = **− 35.92 tm**

Distribusi momen menurut Cross:

① ΔM_B = − 45.08 + 10.83 = − 34.25 tm

$\Delta M_{B\,kiri} = \Delta M_B \cdot \mu$ = + 34.25 · 0.369 = + 12.64 tm
$\Delta M_{B\,kanan} = \Delta M_B \cdot \mu$ = − 34.25 · 0.631 = + 21.61 tm
} **+ 34.25 tm**

② ΔM_C = − 0.02 + 40.82 = − 40.80 tm

$\Delta M_{C\,kiri} = \Delta M_C \cdot \mu$ = − 40.80 · 0.583 = − 23.79 tm
$\Delta M_{B\,kanan} = \Delta M_C \cdot \mu$ = − 40.80 · 0.417 = + 17.01 tm
} **− 40.80 tm**

③ ΔM_B = − 11.90 tm

$\Delta M_{B\,kiri} = \Delta M_B \cdot \mu$ = + 11.90 · 0.369 = + 4.39 tm
$\Delta M_{B\,kanan} = \Delta M_B \cdot \mu$ = + 11.90 · 0.631 = + 7.51 tm
} **+ 11.90 tm**

dsb. .....

Menggambar diagram momen dan diagaram gaya lintang bisa lihat pada contoh 2 bab 6.3.3. (gaya-gaya dan momen pada balok terusan).

7. Konstruksi portal statis tidak tertentu

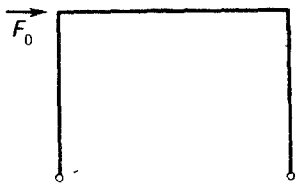
7. 1. Konstruksi portal dengan titik simpul yang kaku

7. 1. 1. Pengetahuan dasar

Sistim Cross yang digunakan untuk perhitungan statika pada balok terusan pada bab 6 juga dapat digunakan untuk menentukan momen pada sudut pada konstruksi portal, jikalau titik simpul tidak bisa bergerak, walaupun boleh memutar.

Titik simpul atau titik sudut pada konstruksi portal menjadi kaku (tidak bisa bergerak), jikalau misalnya konstruksi portal itu bisa menyalurkan gaya horisontal kepada loteng beton atau suai angin horisontal dan kepada dinding bangunan yang kaku. Akan ~~tetapi harus~~ dikatakan bahwa pada banyak konstruksi portal titik simpul tidak boleh dinilai sebagai kaku.

Misalnya pada konstruksi portal dua ruas dengan gaya F_0 (lihat gambar 7. 1. 1. a. sebelah kanan) titik simpul (titik sudut) dengan pasti akan bergerak di bawah gaya F_0. Soal-soal seperti itu kita namakan konstruksi portal dengan titik simpul yang goyah (lihat bab 7. 2.).



Gambar 7. 1. 1. a.

Pada perhitungan momen pada sudut portal pengaruh atas gaya normal dan gaya lintang boleh pada prakteknya dihapuskan.

Perhitungan konstruksi portal menurut Cross boleh digunakan hanya pada konstruksi portal dengan momen lembam / pada masing-masing batang menjadi tetap.

7. 1. 2. Cara distribusi momen menurut Cross

Dengan menggunakan sistim Cross pada konstruksi portal kita bisa menentukan momen pada sudut-sudut. Dengan momen itu kita akan bisa menentukan reaksi tumpuan, momen pada batang-batang, gaya normal dan gaya lintang.

Menurut Cross kita tentukan semua titik simpul sebagai kaku dan dengan begitu, batang masing-masing menjadi balok terjepit. Seperti pada balok terusan kita

selanjutnya melepaskan satu per satu titik simpul sampai semua momen pada satu titik simpul menjadi seimbang, atau boleh dikatakan resultantenya menjadi nol. Semua batang harus dihitung sebagai balok terjepit atau terjepit sebelah. Selama pada satu titik simpul resultante momen belum menjadi nol kita harus memasang satu momen distribusi seperti pada balok terusan.

Perhitungan momen boleh digunakan menurut urutan berikut:

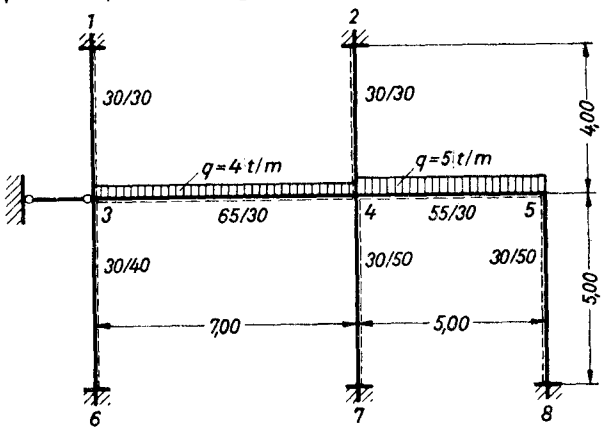
1. Perhitungan momen jepitan pada ujung kiri dan kanan batang masing-masing sebagai balok terjepit atau balok terjepit sebelah.
2. Menentukan resultante momen jepitan (ΔM) pada titik simpul masing-masing.
3. Membagi momen distribusi menurut angka kekakuan batang pada batang masing-masing
4. Menyalurkan momen jepitan (momen residu) menurut koefisien induksi ($\frac{1}{2}$) ke titik simpul berikutnya.
5. Menentukan resultante momen jepitan (ΔM) pada titik simpul berikut dan seterusnya menurut 2. s/d 4.

Memperhatikan perjanjian tanda (+, −) pada sistim Cross seperti dibicarakan pada bab 6. 5. 2.

7. 1. 3. Contoh-contoh

Contoh 1: Konstruksi portal dengan titik simpul yang kaku, lihat Gambar 7. 1. 3. a. berikut.

Dicari: Momen-momen pada tumpuan, titik simpul dan pada batang, reaksi tumpuan-tumpuan dan diagram gaya normal dan gaya lintang.



Gambar 7. 1. 3. a.

Momen lembam /:

batang 1 — 3 } batang 2 — 4 } → $I = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{30 \cdot 30^3}{12} = 67'500\ \text{cm}^4$

batang 3 — 4 → $I = 686'600\ \text{cm}^4$

batang 4 — 5 → $I = 416'000\ \text{cm}^4$

batang 3 — 6 → $I = 160'000\ \text{cm}^4$

batang 4 — 7 } → I = 312'500 ^{4} cm^4
batang 5 — 8 }

Angka kekakuan batang k:

batang 1 — 3 → k_{1-3} }
batang 2 — 4 → k_{2-4} } $= \frac{67'500}{400} = 168.75$ cm^3
batang 3 — 4 → k_{3-4} $= 981$ cm^3
batang 4 — 5 → k_{4-5} $= 832$ cm^3
batang 3 — 6 → k_{3-6} $= 320$ cm^3
batang 4 — 7 → k_{4-7} }
batang 5 — 8 → k_{5-8} } $= 625$ cm^3

Koefisien distribusi μ:

Titik simpul 3:

$k_{1-3} = 168.75$ cm^3
$k_{3-4} = 981$ cm^3
$k_{3-6} = 320$ cm^3
$\Sigma k_3 = 1'465.75$ cm^3

koefisien distribusi μ :

batang 3—1 → $\mu_{3-1} = \frac{168.75}{1469.75} = 0.115$
batang 3—4 → $\mu_{3-4} = \frac{981}{1469.75} = 0.667$
batang 3—6 → $\mu_{3-6} = \frac{320}{1469.75} = 0.218$
$\Sigma\mu_3 = 1.000$

Titik simpul 4:

$k_{3-4} = 981$ cm^3
$k_{2-4} = 168.75$ cm^3
$k_{4-5} = 832$ cm^3
$k_{4-7} = 625$ cm^3
$\Sigma k_4 = 2'606.75$ cm^3

koefisien distribusi μ :

batang 4—3 → $\mu_{4-3} = \frac{981}{2606.75} = 0.376$
batang 4—2 → $\mu_{4-2} = \frac{168.75}{2606.75} = 0.065$
batang 4—5 → $\mu_{4-5} = \frac{832}{2606.75} = 0.319$
batang 4—7 → $\mu_{4-7} = \frac{625}{2606.75} = 0.240$
$\Sigma\mu_4 = 1.000$

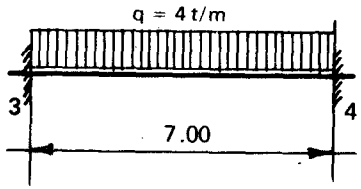
Titik simpul 5:

$k_{4-5} = 832$ cm^3
$k_{5-8} = 625$ cm^3
$\Sigma k_5 = 1'457$ cm^3

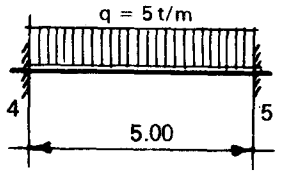
koefisien distribusi μ:

batang 5—4 → $\mu_{5-4} = \frac{832}{1457} = 0.570$
batang 5—8 → $\mu_{5-8} = \frac{625}{1457} = 0.430$
$\Sigma\mu_5 = 1.000$

Perhitungan momen jepitan:

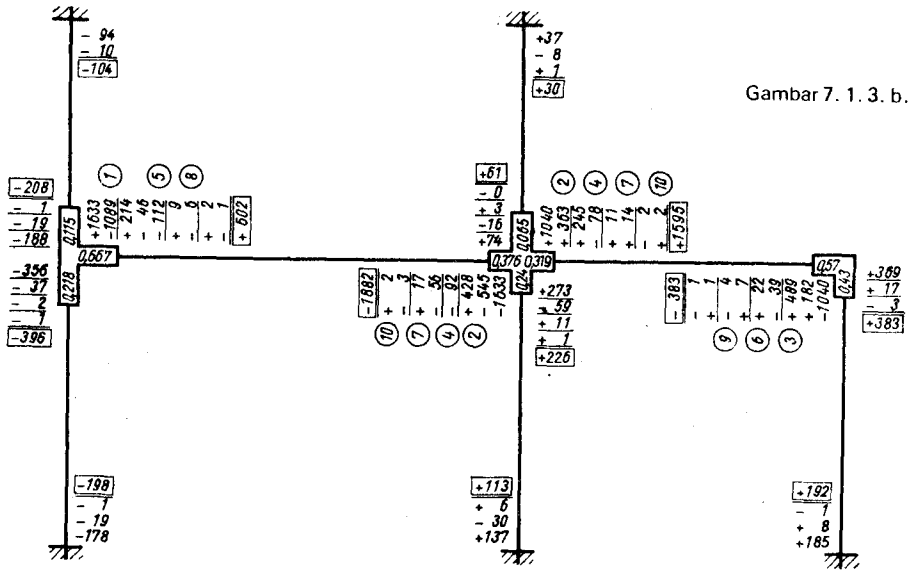


$M_{3,4} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{4.0 \cdot 7.0^2}{12} = -16.33$ tm $=$
-1633 tcm
$M_{4,3} = M_{3,4} = \ldots\ldots\ldots\ldots -1633$ tcm



$M_{4,5} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{5.0 \cdot 5.0^2}{12} = -10.40$ tm $=$
-1040 tcm
$M_{5,4} = M_{4,5} = \ldots\ldots\ldots\ldots -1040$ tcm

Distribusi momen menurut Cross:



Gambar 7. 1. 3. b.

1. Kita mulai dengan distribusi momen pada titik simpul dengan resultante momen jepitan ΔM yang terbesar, pada contoh 1 ini, dengan titik simpul 3. Resultante momen jepitan ΔM_3 pada titik simpul 3 ini menjadi + 1'633 *tcm,* yang akan dibagi sebagai momen distribusi kepada batang 1 — 3, batang 3 — 4 dan batang 3 — 6 menurut koefisien distribusi μ:

$\Delta M_3 = +1633$ tcm.
$\Delta M_{3,1} = -1633 \cdot 0.115 = -188$ tcm
$\Delta M_{3,4} = -1633 \cdot 0.667 = -1089$ tcm
$\Delta M_{3,6} = -1633 \cdot 0.218 = -356$ tcm
} $-\Delta M_3 = -1633$ tcm

Momen distribusi ini akan disalurkan kepada tiap-tiap titik simpul yang berikut menurut koefisien induksi γ:
kepada titik simpul 1 : — 188 . 0.5 = — 94 tcm
kepada titik simpul 4 : — 1089 . 0.5 = — 545 tcm
kepada titik simpul 6 : — 356 . 0.5 = — 178 tcm

2. $\Delta M_4 = -1633 - 545 + 1040 = -1138$ tcm
$\Delta M_{4,3} = +1138 \cdot 0{,}376 = +428$ tcm
$\Delta M_{4,2} = +1138 \cdot 0{,}065 = +74$ tcm
$\Delta M_{4,5} = +1138 \cdot 0{,}319 = +363$ tcm
$\Delta M_{4,7} = +1138 \cdot 0{,}240 = +273$ tcm
} $-\Delta M_4 = +1138$ tcm

Momen distribusi ini akan disalurkan kepada tiap-tiap titik simpul yang berikut menurut koefisien induksi γ:
kepada titik simpul 3 : + 428 . 0.5 = + 214 tcm
kepada titik simpul 2 : + 74 . 0.5 = + 37 tcm
kepada titik simpul 5 : + 363 . 0.5 = + 182 tcm
kepada titik simpul 7 : + 273 . 0.5 = + 137 tcm

3. $\Delta M_5 = -1040 + 182 = -858$ tcm
$\Delta M_{5,4} = +858 \cdot 0{,}57 = +489$ tcm
$\Delta M_{5,8} = +858 \cdot 0{,}43 = +369$ tcm
} $-\Delta M_5 = +858$ tcm

Momen distribusi ini akan disalurkan kepada tiap-tiap titik simpul yang berikut menurut koefisien induksi γ:
kepada titik simpul 4 : + 489 . 0.5 = + 245 tcm
kepada titik simpul 8 : + 369 . 0.5 = + 185 tcm

4. Distribusi momen sekarang mulai lagi pada titik simpul dengan resultante momen jepitan yang terbesar, pada contoh 1 ini, pada titik simpul 4:
$\Delta M_4 = +245$ tcm
$\Delta M_{4,3} = -245 \cdot 0{,}376 = -92$ tcm
$\Delta M_{4,2} = -245 \cdot 0{,}065 = -16$ tcm
$\Delta M_{4,5} = -245 \cdot 0{,}319 = -78$ tcm
$\Delta M_{4,7} = -245 \cdot 0{,}240 = -59$ tcm
} $-\Delta M_4 = -245$ tcm

Momen distribusi ini akan disalurkan kepada tiap-tiap titik simpul yang berikut menurut koefisien induksi γ:
kepada titik simpul 3 : — 92 . 0.5 = — 46 tcm
kepada titik simpul 2 : — 16 . 0.5 = — 8 tcm
kepada titik simpul 5 : — 78 . 0.5 = — 39 tcm
kepada titik simpul 7 : — 59 . 0.5 = — 30 tcm

5. Disitribusi momen berikut dilakukan pada titik simpul 3 dengan $\Delta M_3 = +214 - 46 = +168$ tcm dsb. sampai distribusi momen kesepuluh (sampai semua resultante momen jepitan pada titik simpul masing-masing menjadi nol).

Menggambar diagram momen:
Pertama kita tentukan tanda (+,—) dari momen-momen yang baru ditentukan dengan sistim Cross.

> Momen pada batang-batang yang horisontal adalah positif (+) jikalau ada gaya tarik pada sisi bawah dari batang horisontal itu, dan menjadi negatif (—) sebaliknya.
> Momen pada batang-batang yang berdiri adalah posisif (+) jikalau ada gaya tarik pada sisi dalam (pada portal) atau sisi kanan (pada tiang tengah) dari batang vertikal itu, dan menjadi negatif (—) sebaliknya.

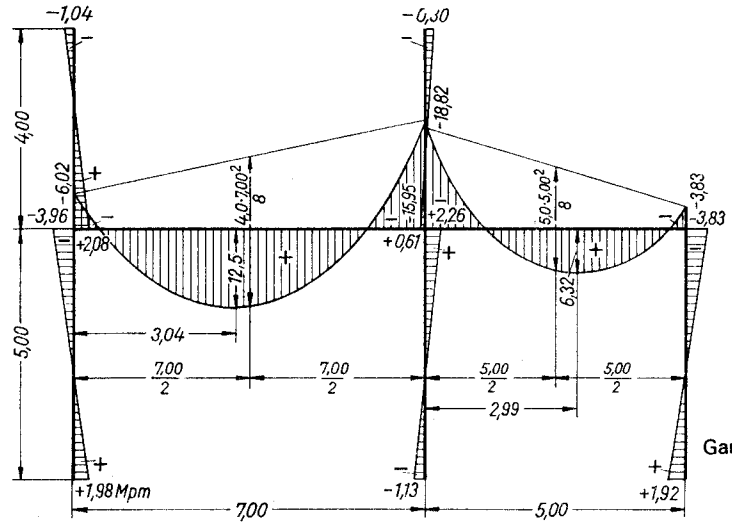
Atas dasar perjanjian tanda (+,—) ini kita boleh menentukan tanda-tanda momen seperti berikut:

Pada titik simpul 3:
batang 3 — 4 = — 6.02 tm
batang 3 — 1 = + 2.08 tm
batang 3 — 6 = — 3.96 tm

Pada titik simpul 4:
batang 4 — 3 = — 18.82 tm
batang 4 — 2 = — 0.61 tm
batang 4 — 5 = — 15.95 tm
batang 4 — 7 = + 2.26 tm

Pada titik simpul 5:
batang 5 — 4 = — 3.83 tm
batang 5 — 8 = — 3.83 tm

Pada tumpuan 1 = — 1.04 tm
Pada tumpuan 2 = — 1.30 tm
Pada tumpuan 6 = + 1.98 tm
Pada tumpuan 7 = — 1.13 tm
Pada tumpuan 8 = + 1.92 tm



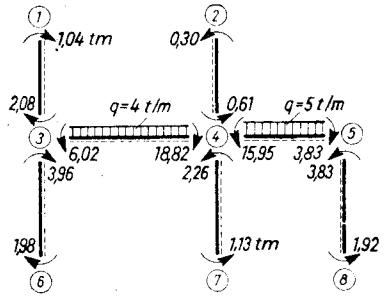
Gambar 7. 1. 3. c.

(Penentuan momen maksimal pada bidang masing-masing lihat selanjutnya sesudah penentuan reaksi tumpuan dengan gambar 7. 1. 3. h.).

Menentukan gaya lintang (Q):
Oleh momen jepitan pada ujung-ujung batang dan bebanan pada batang itu kita bisa menentukan ukuran gaya lintang menurut rumus (6. 16.) berikut:

$$Q = Q_o + \frac{M_2 \cdot M}{l}$$

dengan Q_o = Gaya lintang oleh beban pada sistim dasar (balok tunggal)
Untuk menerangkan momen pada ujung batang masing-masing untuk perhitungan gaya lintang kita gambar sistim statis dari portal tsb. dengan ukuran dan jurusan momen:



Gambar 7. 1. 3. d.

Untuk perhitungan gaya lintang pada batang yang vertikal dan yang tanpa beban kita hanya perlu menentukan reaksi pada tumpuan dengan hasil berikut:

Reaksi pada tumpuan: Gaya lintang:

$$R_1 = \frac{1{,}04 + 2{,}08}{4{,}0} = 0{,}78\,t \leftarrow$$
$$R_{3,1} = 0{,}78\,t \rightarrow \quad \Big\} \quad \ldots\ldots Q_1 = Q_{3,1} = -0{,}78\,t$$

$$R_2 = \frac{0{,}30 + 0{,}61}{4{,}0} = 0{,}23\,t \rightarrow$$
$$R_{4,2} = 0{,}23\,t \leftarrow \quad \Big\} \quad \ldots\ldots Q_2 = Q_{4,2} = -0{,}23\,t$$

$$R_{3,4} = \frac{4{,}0 \cdot 7{,}0}{2} + \frac{6{,}02 - 18{,}82}{7{,}0} = 12{,}17\,t \uparrow \qquad Q_{3,4} = +12{,}17\,t$$

$$R_{4,3} = -12{,}17 + 4{,}0 \cdot 7{,}0 = 15{,}83\,t \uparrow \qquad Q_{4,3} = -15{,}83\,t$$

$$R_{4\text{-}5} = \frac{5{,}0 \cdot 5{,}0}{2} + \frac{15{,}95 - 3{,}83}{5{,}0} = 14{,}92\,t \uparrow \qquad Q_{4,5} = +14{,}92\,t$$

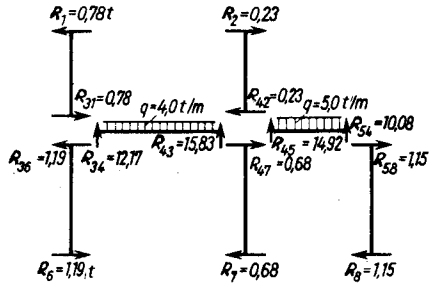
$$R_{5,4} = -14{,}92 + 5{,}0 \cdot 5{,}0 = 10{,}08\,t \uparrow \qquad Q_{5,4} = -10{,}08\,t$$

$$R_{3,6} = \frac{1{,}98 + 3{,}96}{5{,}0} = 1{,}19 \leftarrow$$
$$R_6 = 1{,}19\,t \rightarrow \quad \Big\} \quad \ldots\ldots Q_{3,6} = Q_6 = -1{,}19\,t$$

$$R_{4,7} = \frac{1{,}13 + 2{,}26}{5{,}0} = 0{,}68\,t \rightarrow$$
$$R_7 = 0{,}68\,t \leftarrow \quad \Big\} \quad \ldots\ldots Q_{4,7} = Q_7 = +0{,}68\,t$$

$$R_{5,8} = \frac{1{,}92 + 3{,}83}{5{,}0} = 1{,}15\,t \rightarrow$$
$$R_8 = 1{,}15\,t \leftarrow \quad \Big\} \quad \ldots\ldots Q_{5,8} = Q_8 = +1{,}15\,t$$

Hasil digambar pada sistim statis dari portal tsb:

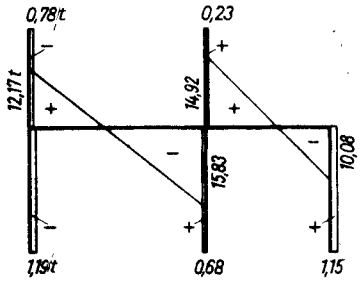


Gambar 7. 1. 3. e.

Dengan menentukan tanda (+, —) dari gaya lintang seperti berikut, kita bisa menggambar diagram gaya lintang.

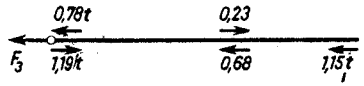
> Gaya lintang pada batang yang horisontal adalah positif (+) jikalau batang sebelah kiri dari satu potongan sembarang akan naik ke atas, dan menjadi negatif (—) sebaliknya.
> Gaya lintang pada batang yang berdiri adalah posisif (+) jikalau balok sebelah bawah dari satu potongan sembarang akan bergerak ke kiri, dan menjadi negatif (—) sebaliknya.

Pada gambar diagram gaya lintang kita perhatikan ketentuan-ketentuan berikut:
Pada batang yang horisontal gaya lintang yang positif (+) digambar sebelah atas dari batang itu, dan yang negatif (—) sebaliknya. Pada batang yang berdiri gaya lintang yang positif (+) digambar pada sisi luar (pada portal) atau sisi kiri (pada tiang tengah) dari batang vertikal itu, dan yang negatif (—) sebaliknya.



Gambar 7. 1. 3. f.

Gaya pengikat horisontal pada titik simpul (F_3):
Konstruksi portal dengan titik simpul yang kaku pada contoh 1 ini menjadi kaku oleh pengikatan horisontal pada titik simpul 3.
Reaksi tumpuan horisontal (F_3) adalah:



$$\Sigma H = 0 = -F_3 - 0{,}78 + 1{,}19 + 0{,}23 - 0{,}68 - 1{,}15$$
$$F_3 = 1{,}42 - 2{,}61 = -1{,}19\ \text{t (gaya tekan)}$$

Menentukan gaya normal (N):
Pada konstruksi portal seperti pada contoh 1 ini gaya normal bisa ditentukan sesudah gaya lintang ditentukan.
Menurut gambar 7. 1. 3. e. dan perhitungan reaksi tumpuan pada titik simpul 3 kita bisa menentukan pada batang-batang yang horisontal:

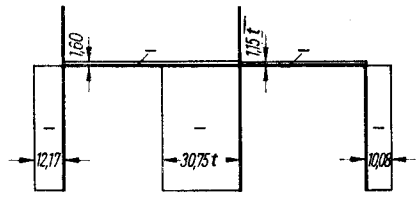
$$N_{3,4} = 0{,}78 - 1{,}19 - 1{,}19 = -1{,}60\ \text{t}$$
$$N_{4,5} = -1{,}60 - 0{,}23 + 0{,}68 = -1{,}15\ \text{t}$$

dan pada batang-batang yang berdiri:

$$N_{3,6} = -12{,}17\ \text{t}$$
$$N_{4,7} = -15{,}83 - 14{,}92 = -30{,}75\ \text{t}$$
$$N_{5,8} = -10{,}08\ \text{t}$$

> Gaya normal diperhitungkan gaya tarik sebagai positif (+) dan gaya tekan sebagai negatif (−).

Pada gambar diagram gaya normal kita perhatikan ketentuan-ketentuan berikut:
Pada batang yang horisontal gaya normal yang positif (+) digambar sebelah bawah dari batang itu, dan yang negatif (−) sebaliknya.
Pada batang yang berdiri gaya normal yang positif (+) digambar pada sisi dalam (pada portal) atau sisi kanan (pada tiang tengah) dari batang vertikal itu, dan yang negatif (−) sebaliknya.



Gambar 7. 1. 3. g.

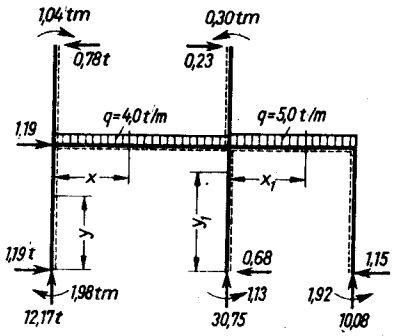
Menentukan reaksi-reaksi tumpuan:
Dengan ketentuan momen-momen jepitan, gaya lintang dan gaya normal dan gaya pengikat horisontal pada titik simpul 3 sebetulnya semua 14 reaksi tumpuan sudah diperhitungkan.
Reaksi tumpuan tsb. adalah:

pada tumpuan 1 : $R_{1h} = -0.78$ t
$M_1 = -1.04$ tm
pada tumpuan 2 : $R_{2h} = +0.23$ t
$M_2 = -0.30$ tm
pada tumpuan 6 : $F_3 = +1.19$ t
pada tumpuan 6 : $R_{6V} = -12.17$ t
$R_{6h} = +1.19$ t
$M_6 = +1.98$ tm
pada tumpuan 7 : $R_{7V} = -30.75$ t
$R_{7h} = -0.68$ t
$M_7 = -1.13$ tm
pada tumpuan 8 : $R_{8V} = -10.08$ t
$R_{8h} = -1.15$ t
$M_8 = +1.92$ tm

Pemeriksaan menurut syarat-syarat perseimbangan:

$$\Sigma V = 4{,}0 \cdot 7{,}0 + 5{,}0 \cdot 5{,}0 - 12{,}17 - 30{,}75 - 10{,}08 = 28 + 25 - 52{,}0 = 0$$
$$\Sigma H = -0{,}78 + 0{,}23 + 1{,}19 + 1{,}19 - 0{,}68 - 1{,}15 = -2{,}61 + 2{,}61 = 0$$

Reaksi pada tiap-tiap tumpuan:



Gambar 7. 1. 3. h.

Menentukan momen maximal (M_x dan $M_{x'}$):
Momen maximal bisa ditentukan seperti pada balok terusan pada rumus (6. 57):

rumus (6.57.): $M_{max} = \frac{R_c^2}{2q} - M_c$

yaitu: $M_x = \frac{12.17^2}{2 \cdot 4.0} - 6.02 = +\ 12.5$ tm

$M_{x'} = \frac{10.08^2}{2 \cdot 5.0} - 3.83 = +\ 6.32$ tm

Ukuran x dan x^1 dapat ditentukan pada tempat gaya lintang menjadi nol:

$Q_x = 12.17 - 4.0 \cdot x = 0$

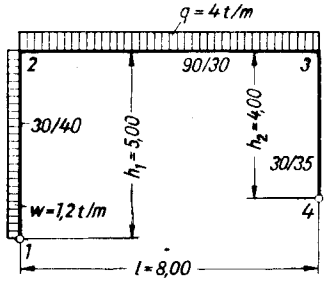
$\rightarrow x = \frac{12.17}{4.0} = 3.04$ m

$Q_{x'} = -10.08 + 5.0 \cdot x' = 0$

$\rightarrow x' = \frac{10.08}{5.0} = 2.01$ m (atau 2.99 m dari tiang tengah)

x dan x' dapat diukur dari tumpuan dengan reaksi tumpuan vertikal yang terkecil (lihat gambar 7. 1. 3. h. dan diagram momen 7. 1. 3. c.).

Contoh 2: Konstruksi portal dua ruas. Dengan suai angin konstruksi menjadi kaku pada titik simpul (sudut). Menentukan momen jepitan untuk beban konstruksi atap (loteng) dan untuk beban horisontal oleh tekanan angin.



Gambar 7. 1. 3. i.

Momen lembam I:

batang 1 — 2 → $I = \frac{3,0 \cdot 4,0^3}{12} = 16,00$ dm^4 = 160000 cm^4

batang 2 — 3 → $I = \frac{3,0 \cdot 9,0^3}{12} = 182,00$ dm^4 = 1822000 cm^4

batang 3 — 4 → $I = \frac{3,0 \cdot 3,5^3}{12} = 10,72$ dm^4 = 107200 cm^4

Angka kekakuan batang k:

batang 1 — 2 → $k'_{1,2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_{1,2}}{h_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{160000}{500} = 240$ cm^3

batang 3 — 4 → $k'_{3,4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_{2,4}}{h_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{107200}{400} = 201$ cm^3

batang 2 — 3 → $k'_{2,3} = \frac{I_{2,3}}{l} = \frac{1822000}{800} = 2280$ cm^3

Koefisien distribusi μ:

titik simpul 2:

$k_{1,2} = 240$ cm^3

$k_{2,3} = 2'280$ cm^3

$\Sigma k_2 = 2'520$ cm^3

koefisien distribusi μ:

batang 1 — 2 → $\mu_{2,1} = \frac{240}{2520} = 0.095$

batang 2 — 3 → $\mu_{2,3} = \frac{2280}{2520} = 0.905$

$\Sigma \mu_2 = 1,000$

titik simpul 3:

$k_{2,3} = 2'280$ cm^3

$k_{3,4} = 201$ cm^3

$\Sigma k_3 = 2'481$ cm^3

koefisien distribusi μ:

batang 2 — 3 → $\mu_{3,2} = \frac{2280}{2481} = 0.920$

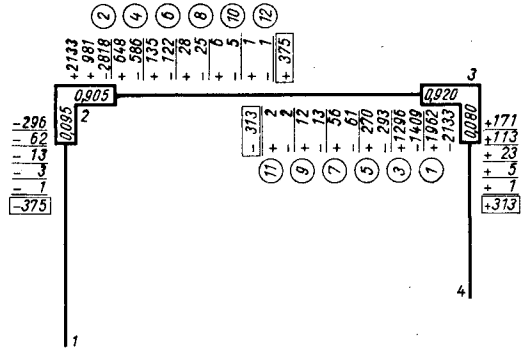
batang 3 — 4 → $\mu_{3,4} = \frac{201}{2491} = 0.080$

$\Sigma \mu_3 = 1,000$

Perhitungan momen jepitan:
momen jepitan oleh beban merata (konstruksi atap) $q = 4.0$ t/m

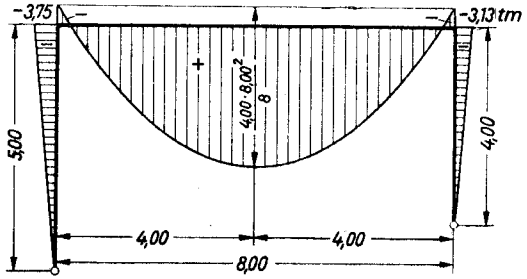
$M_2 = M_3 = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{4,0 \cdot 8,0^2}{12} = -21,33$ tm

Distribusi momen menurut Cross: (diperhitungkan seperti biasa)



Gambar 7. 1. 3. k.

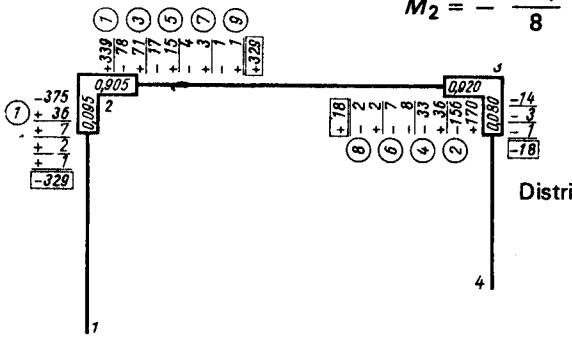
Menggambar diagram momen:
dengan memperhatikan perjanjian tanda kita bisa menggambar diagram momen oleh beban merata (konstruksi atap) $q = 4.0$ t/m seperti berikut:



Gambar 7. 1. 3. 1.

Perhitungan jepitan momen jepitan:
momen jepitan oleh beban (tekanan) angin $w = 1.2$ t/m

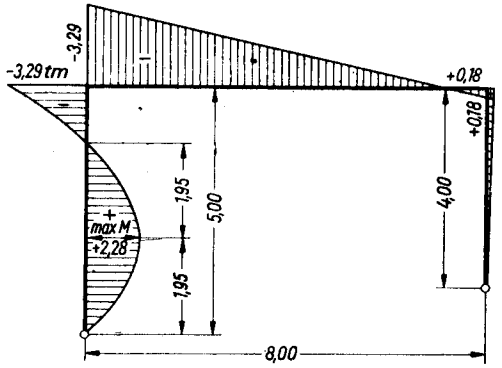
$$M_2 = -\frac{W \cdot l^2}{8} = -\frac{1{,}2 \cdot 5{,}0^2}{8} = -3{,}75 \text{ tm}$$



Distribusi momen menurut Cross:

Gambar 7. 1. 3. m.

Menggambar diagram momen:
dengan memperhatikan perjanjian tanda kita bisa menggambar diagram momen oleh beban (tekanan) angin $w = 1.2$ t/m seperti berikut:



Gambar 7. 1. 3. n.

Pada permulaan contoh 2 ini kita menentukan bahwa konstruksi portal dua ruas ini boleh dihitung dengan titik simpul sebagai kaku oleh konstruksi suai angin. Sekarang kita harus memeriksa, apakah suai angin betul cukup kuat untuk menerima gaya horisontal oleh tekanan angin.

Menentukan gaya lintang (Q):
Untuk perhitungan gaya lintang pada batang yang vertikal kita hanya perlu menentukan reaksi horisontal pada tumpuan masing-masing.

$$\Sigma M_2 = 0 = R_{1h} \cdot 5{,}00 + \frac{1{,}2 \cdot 5{,}0^2}{2} + M_2$$

$$R_{1H} = -\frac{1}{5{,}0}\left(\frac{1{,}2 \cdot 5{,}0^2}{2} + M_2\right) = -3{,}0 + \frac{3{,}29}{5{,}0} = -2{,}34 \text{ t} \quad = Q_1$$

$$R_{2,1} = \frac{1.2 \cdot 5.0^2}{2} + \frac{0 + 3.29}{5.0} = +3.66 \text{ t} \quad = Q_2$$

$$R_{2,3} = -\frac{M_2 - M_3}{8{,}00} = -\frac{-3{,}29 - 0{,}18}{8{,}00} = +0{,}43 \text{ t}$$

$$R_{3,2} = +0.43 \text{ t} \quad \Big\} = Q_{2,3}$$

$$R_{3,4} = -\frac{M_3}{4{,}0} = -\frac{0{,}18}{4{,}0} = -0{,}05 \text{ t}$$

$$R_{4h} = -0.05 \text{ t} \quad \Big\} = Q_{3,4}$$

Gaya pengikat horisontal pada titik simpul 2 (F_2):
Dengan memperhatikan catatan di bawah gambar 7. 1. 3. n. reaksi gaya pengikat horisontal F_2 harus disalurkan oleh suai angin: (pada perhitungan kita memilih jurusan F_2 dari kiri ke kanan)

$$F_2 = R_{2,1} + R_{3,4} = -3{,}66 \text{ t} - 0.05 \text{ t} = -3.71 \text{ t}$$

Tanda minus (—) menentukan bahwa pilihan jurusan F_2 dari kiri ke kanan sebetulnya salah, dan F_2 berjurusan dari kanan ke kiri, yaitu gaya tarik.

Menentukan gaya normal (N):

$$N_{1,2} = Q_{2,3} = +0.43 \text{ t}$$
$$N_{3,4} = -Q_{2,3} = -0.43 \text{ t}$$
$$N_{2,3} = F_2 + Q_{2,1} = -3.71 + 3.66 = -0.05 \text{ t}$$

Menentukan reaksi-reaksi tumpuan:
reaksi tumpuan masing-masing oleh tekanan angin (w) adalah:

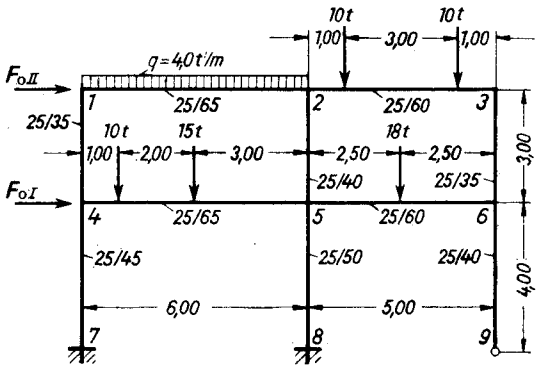
pada tumpuan 1 : $R_{1h} = -2.34$ t
$R_{1V} = -0.43$ t
pada tumpuan 2 : $F_2 = -3.71$ t (oleh suai angin)
pada tumpuan 4 : $R_{4V} = +0.43$ t
$R_{4h} = -0.05$ t

Menentukan momen maximal dsb. menurut contoh. 1.

Contoh 3:

Konstruksi portal bertingkat menurut gambar 7. 1. 3. o. Dengan pertolongan gaya pengikat horisontal F_{oI} dan F_{oII} kita bisa menentukan sistim ini sebagai kaku.

Dicari: Momen-momen menurut Cross.



Gambar 7. 1. 3. o.

Momen lembam *I*:

$$I_{1,2} = I_{4,5} = \frac{25 \cdot 65^3}{12} = 572000 \text{ cm}^4$$

$$I_{2,3} = I_{5,6} = \frac{25 \cdot 60^3}{12} = 450000 \text{ cm}^4$$

$$I_{1,4} = I_{3,6} = \frac{25 \cdot 35^3}{12} = 89300 \text{ cm}^4$$

$$I_{2,5} = I_{6,9} = \frac{25 \cdot 40^3}{12} = 133300 \text{ cm}^4$$

$$I_{4,7} = 189600 \text{ cm}^4$$

$$I_{5,8} = 260000 \text{ cm}^4$$

Angka kekakuan batang *k*:

batang 4 — 5 → $k_{4,5}$
batang 1 — 2 → $k_{1,2}$ } $= \frac{572000}{600} = 953 \text{ cm}^3$

batang 2 — 3 dan batang 5 — 6 → $k_{2,3}$ dan $k_{5,6} = 900 \text{ cm}^3$

batang 1 — 4 dan batang 3 — 6 → $k_{1,4}$ dan $k_{3,6} = 298 \text{ cm}^3$

batang 2 — 5 → $k_{2\text{-}5} = 444 \text{ cm}^3$

batang 4 — 7 → $k_{4\text{-}7} = 474 \text{ cm}^3$

batang 5 — 8 → $k_{5\text{-}8} = 650 \text{ cm}^3$

batang 6 — 9 → $k'_{6\text{-}9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{133300}{400} = 250 \text{ cm}^3$

Koefisien distribusi μ:

titik simpul 1:

$k_{1\text{-}2} = 953 \text{ cm}^3$
$k_{1\text{-}4} = 298 \text{ cm}^3$
$\Sigma k_1 = 1'251 \text{ cm}^3$

titik simpul 2:

$k_{2\text{-}1} = 953 \text{ cm}^3$
$k_{2\text{-}3} = 900 \text{ cm}^3$
$k_{2\text{-}5} = 444 \text{ cm}^3$
$\Sigma k_2 = 2'297 \text{ cm}^3$

titik simpul 3:

$k_{3\text{-}2} = 900 \text{ cm}^3$
$k_{3\text{-}6} = 298 \text{ cm}^3$
$\Sigma k_3 = 1'198 \text{ cm}^3$

titik simpul 4:

$k_{4\text{-}1} = 298 \text{ cm}^3$
$k_{4\text{-}5} = 953 \text{ cm}^3$
$k_{4\text{-}7} = 474 \text{ cm}^3$
$\Sigma k_4 = 1'725 \text{ cm}^3$

titik simpul 5:

$k_{5\text{-}4} = 953 \text{ cm}^3$
$k_{5\text{-}2} = 444 \text{ cm}^3$
$k_{5\text{-}6} = 900 \text{ cm}^3$
$k_{5\text{-}8} = 651 \text{ cm}^3$
$\Sigma k_5 = 2'947 \text{ cm}^3$

titik simpul 6:

$k_{6\text{-}5} = 900 \text{ cm}^3$
$k_{6\text{-}3} = 298 \text{ cm}^3$
$k'_{6\text{-}9} = 250 \text{ cm}^3$
$\Sigma k_6 = 1'448 \text{ cm}^3$

koefisien distribusi μ:

batang 1 — 2 → $\mu_{1,2} = \frac{953}{1251} = 0.762$

batang 1 — 4 → $\mu_{1,4} = \frac{298}{1251} = 0.238$

$\Sigma\mu_1 = 1.000$

koefisien distribusi μ:

batang 2 — 1 → $\mu_{2,1} = \frac{953}{2297} = 0.414$

batang 2 — 3 → $\mu_{2,3} = \frac{900}{2297} = 0.392$

batang 2 — 5 → $\mu_{2,5} = \frac{444}{2297} = 0.194$

$\Sigma\mu_2 = 1.000$

koefisien distribusi μ:

batang 3 — 2 → $\mu_{3,2} = \frac{900}{1198} = 0.751$

batang 3 — 6 → $\mu_{3,6} = \frac{298}{1198} = 0.249$

$\Sigma\mu_3 = 1.000$

koefisien distribusi μ:

batang 4 — 1 → $\mu_{4,1} = \frac{298}{1725} = 0.173$

batang 4 — 5 → $\mu_{4,5} = \frac{953}{1725} = 0.552$

batang 4 — 7 → $\mu_{4,7} = \frac{474}{1725} = 0.275$

$\Sigma\mu_4 = 1.000$

koefisien distribusi μ:

batang 5 — 4 → $\mu_{5,4} = \frac{953}{2947} = 0.323$

batang 5 — 2 → $\mu_{5,2} = \frac{444}{2947} = 0.151$

batang 5 — 6 → $\mu_{5,6} = \frac{900}{2947} = 0.305$

batang 5 — 8 → $\mu_{5,8} = \frac{650}{2947} = 0.221$

$\Sigma\mu_5 = 1.000$

koefisien distribusi μ:

batang 6 — 5 → $\mu_{6,5} = \frac{900}{1448} = 0.622$

batang 6 — 3 → $\mu_{6,3} = \frac{298}{1448} = 0.206$

batang 6 — 9 → $\mu_{6,9} = \frac{250}{1448} = 0.172$

$\Sigma\mu_6 = 1.000$

Perhitungan momen jepitan:

$$M_{1,2} = M_{2,1} = -\frac{4{,}00 \cdot 6{,}00^2}{12} = -12{,}0 \text{ tm}$$

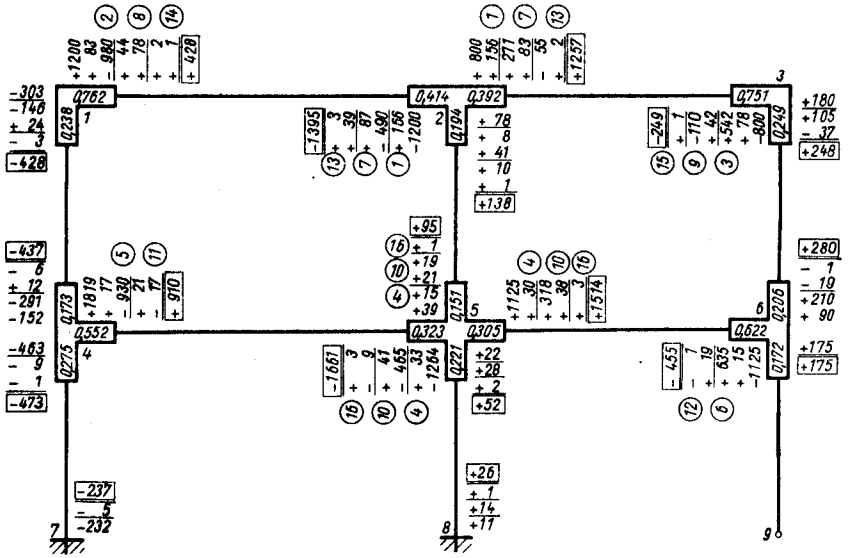
$$M_{2,3} = M_{3,2} = -\frac{10{,}00 \cdot 1{,}00}{5{,}00}(5{,}0 - 1{,}0) = -8{,}00 \text{ tm}$$

$$M_{4,5} = -\frac{10{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 5{,}0^2}{6{,}0^2} - \frac{15{,}0 \cdot 6{,}0}{8} = -18{,}19 \text{ tm}$$

$$M_{5,4} = -\frac{10{,}0 \cdot 1{,}0^2 \cdot 5.0}{6{,}0^2} - \frac{15{,}0 \cdot 6{,}0}{8} = -12{,}64 \text{ tm}$$

$$M_{5,6} = M_{6,5} = -\frac{18{,}00 \cdot 5{,}00}{8} = -11{,}25 \text{ tm}$$

Distribusi momen menurut Cross:



Gambar 7. 1. 3. p.

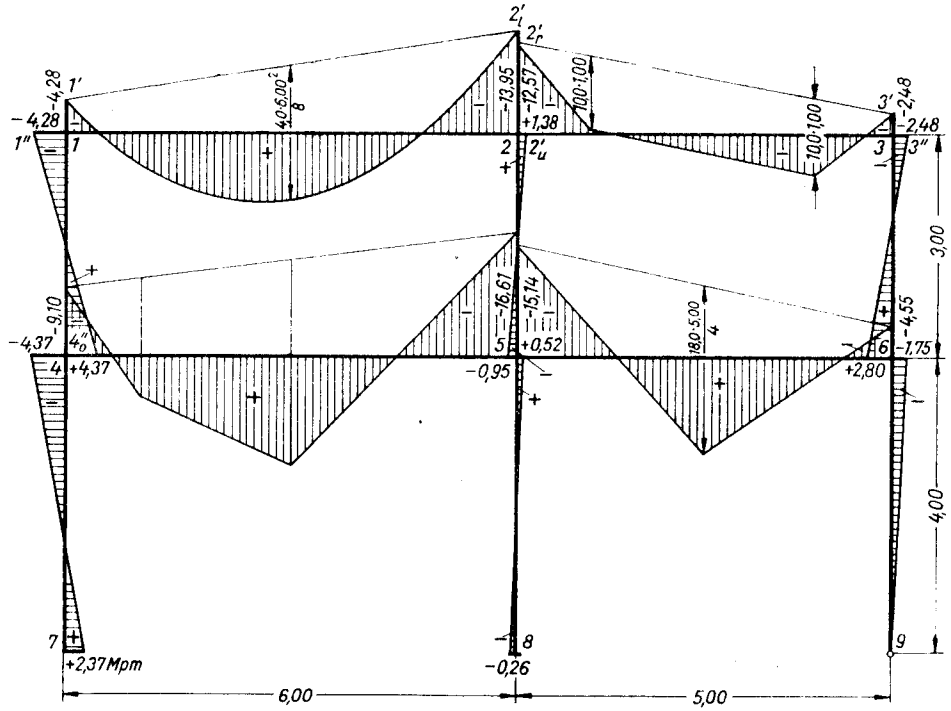
Atas dasar perjanjian tanda (+, —) bagi momen-momen kita dapat menentukan tanda-tanda momen seperti berikut:

pada titik simpul 1 :	batang 1 — 2 batang 1 — 4	=	— 4.28 tm
pada titik simpul 2 :	batang 2 — 1	=	— 13.95 tm
	batang 2 — 3	=	— 12.57 tm
	batang 2 — 5	=	+ 1.38 tm

pada titik simpul 3 :	batang 3 — 2 batang 3 — 6	=	— 2.48 tm
pada titik simpul 4 :	batang 4 — 1	=	+ 4.37 tm
	batang 4 — 5	=	— 9.10 tm
	batang 4 — 7	=	— 4.73 tm
pada titik simpul 5 :	batang 5 — 4	=	— 16.61 tm
	batang 5 — 6	=	— 15.14 tm
	batang 5 — 2	=	— 0.95 tm
	batang 5 — 8	=	+ 0.52 tm
pada titik simpul 6 :	batang 6 — 5	=	— 4.55 tm
	batang 6 — 3	=	+ 2.80 tm
	batang 6 — 9	=	— 1.75 tm

pada tumpuan 7: = + 2.37 tm
pada tumpuan 8: = — 0.26 tm

Menggambar diagram momen:



7. 2. Konstruksi portal dengan titik simpul yang goyah

7. 2. 1. Penurunan tumpuan pada balok terjepit

Jikalau pada satu balok terjepit satu tumpuan mulai turun vertikal ke bawah, penurunan tumpuan itu mengakibatkan momen jepitan pada dua tumpuan jepitan yang mempunyai ukuran dan tanda (+, −) yang sama sebelah kiri dan sebelah kanan. Besarnya ukuran tergantung pada ukuran penurunan tumpuan δ (yang selanjutnya dinamakan sebagai koefisien pergoyangan) dan pada angka kekakuan batang. Pada balok terjepit dengan momen lembam I tetap, momen jepitan (M_{ik}) menjadi:

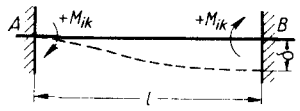
$$M_{ik} = + \frac{6E \cdot I \cdot \delta}{l^2} = \frac{6E \cdot \delta}{l} k \qquad \text{dgn. } k = I/l \quad (7.1.)$$

dan pada balok terjepit sebelah momen jepitan (M_{ik}) menjadi:

$$M_{ik} = + \frac{3E \cdot I \cdot \delta}{l^2} = \frac{4E \cdot \delta}{l} k' \qquad \text{dgn. } k' = \frac{3}{4} \cdot \frac{I}{l} \quad (7.2.)$$

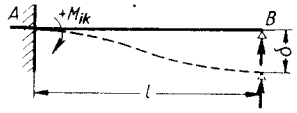
Sesudah momen jepitan (M_{ik}) oleh ukuran penurunan tumpuan δ pada balok terjepit ditentukan, kita selanjutnya bisa mencari momen masing-masing pada balok terusan misalnya atau konstruksi portal menurut sistim Cross.

Gambar balok terjepit dengan penurunan tumpuan



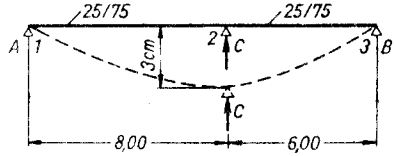
Gambar 7. 2. 1. a.

Gambar balok terjepit sebelah dengan penurunan tumpuan rol



Gambar 7. 2. 1. b.

Contoh: Pada balok terusan dari beton bertulang tumpuan B mengalami penurunan tumpuan sebesar 3 cm oleh karena pondasi di bawah tiang itu tidak cukup kuat. (E = 210'000 kg/cm²).
Dicari: Momen koreksi pergoyangan (M_{ik}) yang timbul oleh penurunan tumpuan B itu.



Gambar 7. 2. 1. c.

Momen lembam I:

batang 1 — 2 dan batang 2 — 3 → $I = \frac{25 \cdot 75^3}{12} = 880000\ \text{cm}^4$

Angka kekakuan batang k':

batang 1 — 2 → $k'_{1\text{-}2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{880000}{800} = 825\ \text{cm}^3$

batang 2 — 3 → $k'_{2\text{-}3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{880000}{600} = 1100\ \text{cm}^3$

Koefisien distribusi:

titik simpul 2:

$k'_{1\text{-}2} = 825\ \text{cm}^3$

$k'_{2\text{-}3} = 1'100\ \text{cm}^3$

$\Sigma k_2 = 1'925\ \text{cm}^3$

koefisien distribusi:

batang 1 — 2 → $\mu_{1,2} = \frac{825}{1925} = 0{,}428$

batang 2 — 3 → $\mu_{2,3} = \frac{1100}{1925} = 0{,}572$

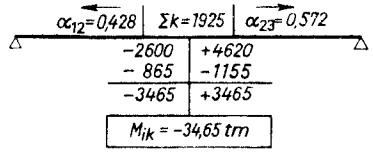
$\Sigma \mu_2 = 1{,}000$

Perhitungan momen koreksi pergoyangan (M_{ik}):

$$M_{ik\,2,1} = \frac{4 \cdot E \cdot \delta}{l} \quad k'_{1\text{-}2} = \frac{4 \cdot 210000 \cdot 3}{800} \quad 825 = 2600000\ \text{kgcm} = 26{,}00\ \text{tm}$$

$$M_{ik\,2,3} = \frac{4 \cdot E \cdot \delta}{l} \quad k'_{2\text{-}3} = \frac{4 \cdot 210000 \cdot 3}{600} \quad 1100 = 4620000\ \text{kgcm} = 46{,}2\ \text{tm}$$

Distribusi momen menurut Cross:

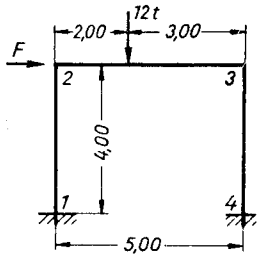


Contoh ini memperlihatkan dengan $M_{ik} = -34.65$ tm suatu tegangan yang tinggi sekali pada sistim statis tidak tertentu oleh suatu turunan tumpuan yang agak kecil.

7. 2. 2. Berpengaruh atas titik simpul yang goyah

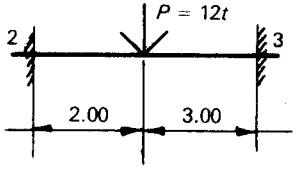
Seperti berulang kali ditentukan sistim Cross sampai sekarang hanya boleh dilakukan kalau titik simpul pada waktu mendistribusi momen menjadi kaku. Ketentuan ini pada banyak hal tidak betul. Tanpa misalnya loteng dari beton bertulang atau konstruksi suai angin yang khusus, hampir semua konstruksi portal menjadi goyah.

Contoh: Konstruksi portal yang terjepit. Untuk memudahkan perhitungan ini kita tentukan, bahwa angka kekakuan batang $k = 1$ untuk semua batang. Atas dasar itu, koefisien distribusi $\mu = 0.5$ untuk semua batang. Harus diperhatikan, bahwa koefisien induksi juga menjadi $\gamma = 0.5$ seperti biasa.



Gambar 7. 2. 2. a.

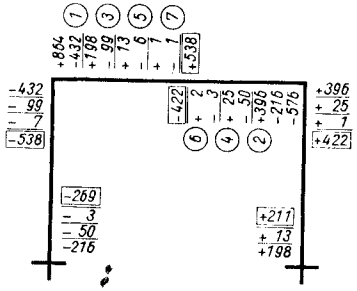
Perhitungan momen jepitan:



$$M_{2,3} = -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = -\frac{12{,}0 \cdot 2{,}0 \cdot 3{,}0^2}{5{,}0^2} = -8{,}64 \text{ tm}$$

$$M_{3,2} = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2} = -\frac{12{,}0 \cdot 2{,}0^2 \cdot 3{,}0}{5{,}0^2} = -5{,}76 \text{ tm}$$

Distribusi momen menurut Cross:



Gambar 7. 2. 2. b.

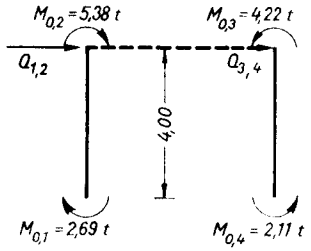
Momen jepitan M_0 pada konstruksi portal yang terjepit dan dengan titik simpul yang kaku adalah:

$M_{0,1} = +2.69$ tm
$M_{0,2} = -5.38$ tm
$M_{0,3} = -4.22$ tm
$M_{0,4} = +2.11$ tm

Momen jepitan dengan tanda (index) M_0 menentukan, bahwa momen jepitan itu ditentukan pada konstruksi portal dengan titik simpul yang kaku. Ini hanya mungkin oleh gaya F yang menerima gaya horisontal pada batang 2 – 3.

> Suatu gaya pengikat horisontal (F) menjadi positif (+) jikalau jurusannya ke kanan, dan menjadi negatif (–) sebaliknya.

Untuk menerangkan momen jepitan pada tiap-tiap ujung batang pada perhitungan gaya pengikat horisontal (F) kita menggambar sistim konstruksi portal yang terjepit dengan masing-masing momen.



Gambar 7. 2. 2. c.

Perhitungan gaya pengikat horisontal F_0:
Gaya pengikat horisontal F_0 = gaya lintang $Q_{1,2} + Q_{3,4}$

$$\Sigma M_1 = 0 = Q_{1,2} \cdot 4{,}0 + M_{0,1} + M_{0,2}$$
$$Q_{1,2} = -1/4\,(M_{0,1} + M_{0,2}) = -1/4\,(2{,}69 + 5{,}38) = -2{,}02 \text{ t}$$
$$\Sigma M_4 = 0 = Q_{3,4} \cdot 4{,}0 - M_{0,3} - M_{0,4}$$
$$Q_{3,4} = 1/4\,(M_{0,3} + M_{0,4}) = 1/4\,(4{,}22 + 2{,}11) = 1{,}58 \text{ t}$$
$$F_0 = -2{,}02 + 1{,}58 = -0{,}44 \text{ t}$$

Atas dasar perhitungan ini kita lihat, bahwa gaya pengikat (F_0) jurusannya ke kiri. Tanpa gaya pengikat horisontal (F_0) konstruksi portal yang terjepit bergerak ke kanan dan perlu diperhitungkan lagi sebagai konstruksi portal dengan titik simpul yang goyah dengan koefisien pergoyangan δ. Koefisien pergoyangan δ mengakibatkan momen jepitan M_{ik} sebagai tambahan bagi momen jepitan M_0 yang bisa kita tentukan dengan cara distribusi momen menurut Cross.

Jalan lain sebetulnya lebih berguna. Kita memilih suatu koefisien pergoyangan $\bar{\delta}$ (ukuran bergerak) dan menentukan momen jepitan M_{ik} menurut bab 7. 2. 1. Oleh momen jepitan M_{ik} pada batang vertikal kita mendapat suatu gaya pengikat horisontal F_{ik}

Oleh karena gaya pengikat horisontal F_0 pada konstruksi portal dengan titik simpul yang goyah harus menjadi nol kita memilih koefisien pergoyangan $\bar{\delta}$ (ukuran bergerak) begitu, supaya:

$$F_0 = \bar{\mu} \cdot F_{ik} = 0 \qquad \text{atau} \qquad \bar{\mu} = -\frac{F_0}{F_{ik}} \tag{7.3.}$$

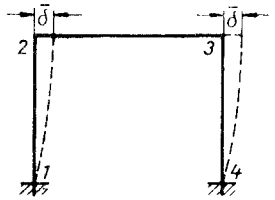
Selanjutnya momen jepitan M_{ik} oleh koefisien pergoyangan $\bar{\delta}$ harus dikalikan dengan *faktor pengikat* $\bar{\mu}$. Momen jepitan M akhirnya menjadi

$$M = M_0 + \bar{\mu} \cdot M_{ik} \tag{7.4.}$$

Lebih mudah lagi momen jepitan M bisa kita tentukan jikalau kita tidak memilih koefisien pergoyangan $\bar{\delta}$, melainkan langsung memilih momen jepitan M_{ik}.

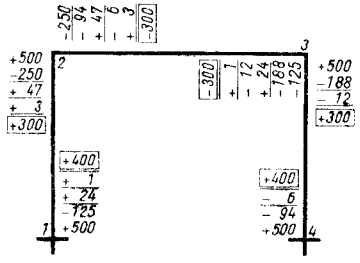
7. 2. 3. Contoh-contoh

Contoh 1: Konstruksi portal yang terjepit, lihat gambar 7. 2. 2. a. mengalami pergerakan sebesar $\bar{\delta}$ (koefisien pergoyangan). Pergerakan $\bar{\delta}$ menjadikan momen $M_{ik\ 1,2}$ dan $M_{ik\ 4,3}$ sebesar + 5 tm pada batang 1-2 dan momen $M_{ik\ 2,1}$ dan $M_{ik\ 3,4}$ sebesar + 5 tm pada batang 3-4.



Gambar 7. 2. 3. a.

Distribusi momen (M_{ik}) menurut Cross:

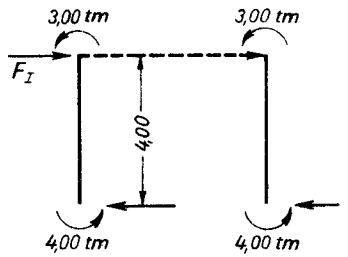


Gambar 7. 2. 3. b.

Hasil momen M_{ik} adalah:

$M_{ik,1} = -4.0\ tm$
$M_{ik,2} = +3.0\ tm$
$M_{ik,3} = -3.0\ tm$
$M_{ik,4} = +4.0\ tm$

Perhitungan gaya pengikat horisontal (F_{ik}):



$$\Sigma M_{1-4} = 0$$

$$F_{ik} \cdot 4{,}0 + 3{,}0 + 4{,}0 + 3{,}0 + 4{,}0 = 0$$

$$F_{ik} = \frac{3{,}0 + 4{,}0 + 3{,}0 + 4{,}0}{4{,}0} = 3{,}5\ t$$

Gambar 7. 2. 3. c.

menurut rumus (7. 3.) kita boleh menentukan $\bar{\mu}$ dengan:

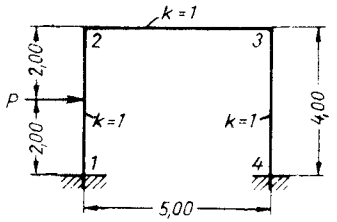
$$\bar{\mu} = +\frac{0{,}44}{3{,}5} = 0{,}126 \qquad (F_o \text{ lihat pada gambar 7. 2. 2. d.})$$

menurut rumus (7. 4.) kita boleh menentukan momen jepitan M seperti berikut (M_0 lihat di bawah gambar 7. 2. 2. b.):

$$M = M_0 + \bar{\mu} \cdot M_1 = M_0 + 0{,}126 \text{ tm}$$
$$M_1 = M_{0,1} + \bar{\mu} \cdot M_{1,1} = +2{,}69 - 0{,}126 \cdot 4{,}0 = +2{,}19 \text{ tm}$$
$$M_2 = M_{0,2} + \bar{\mu} \cdot M_{1,2} = -5{,}38 + 0{,}126 \cdot 3{,}0 = -5{,}00 \text{ tm}$$
$$M_3 = M_{0,3} + \bar{\mu} \cdot M_{1,3} = -4{,}22 - 0{,}126 \cdot 3{,}0 = -4{,}60 \text{ tm}$$
$$M^4 = M_{0,4} + \bar{\mu} \cdot M_{1,4} = +2{,}11 + 0{,}126 \cdot 4{,}0 = +2{,}61 \text{ tm}$$

Contoh 2: Konstruksi portal yang terjepit seperti pada contoh 1, tetapi dibebani oleh gaya horisontal $P = 3.0$ t pada tiang 1-2.

Angka kekakuan batang $k = 1$ untuk semua batang. Atas dasar ini koefisien distribusi $\bar{\mu} = 0.5$ untuk semua batang.

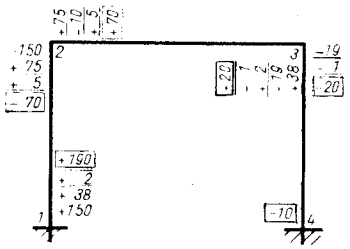


Gambar 7. 2. 3. d.

Perhitungan momen jepitan:

$$M_{1,2} = M_{2,1} = -\frac{P \cdot h}{8} = -\frac{3{,}0 \cdot 4{,}0}{8} = -1{,}5\ tm$$

Distribusi momen menurut Cross:

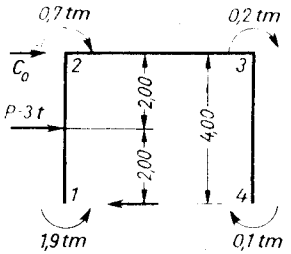


Hasil momen jepitan M_o adalah:

$M_{0,1} = -1.9$ tm
$M_{0,2} = -0.7$ tm
$M_{0,3} = +0.2$ tm
$M_{0,4} = -0.1$ tm

Gambar 7. 2. 3. e.

Perhitungan gaya pengikat horisontal (F_o):



$$\Sigma M_{1\,4} = 0$$

$$F_o \cdot 4{,}0 + 3{,}0 \cdot 2{,}0 + 0{,}7 - 1{,}9 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0$$

$$F_o = \frac{-6{,}0 - 0{,}7 + 1{,}9 - 0{,}2 - 0{,}1}{4{,}0} = -1{,}275\ t$$

Gambar 7. 2. 3. f.

Perhitungan momen (M_{ik}) seperti pada contoh 1 oleh $\bar{\delta}$:

$M_{ik,1} = -4.0$ tm
$M_{ik,2} = +3.0$ tm
$M_{ik,3} = -3.0$ tm
$M_{ik,4} = +4.0$ tm

Perhitungan gaya pengikat horisontal (F_{ik}) seperti pada contoh 1: $F_{ik} = 3.5$ t.

Menurut rumus (7. 3.) kita boleh menentukan $\bar{\mu}$ dengan:

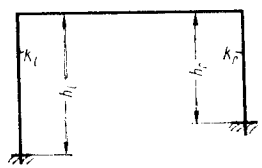
$$F_o + \bar{\mu} \cdot F_{ik} = -1{,}275 + \bar{\mu} \cdot 3{,}5 = 0 \qquad \bar{\mu} = \frac{1{,}275}{3{,}5} = 0{,}364$$

Menurut rumus (7. 4.) kita boleh menentukan momen jepitan M seperti berikut:

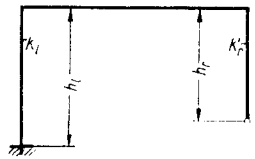
$$M = M_o + 0{,}364\, M_1$$

$M_1 = -1{,}9 + 0{,}364\,(-4{,}0) = -1{,}9 - 1{,}456 = -3{,}356$ tm
$M_2 = -0{,}7 + 0{,}364 \cdot 3{,}0 = -0{,}7 + 1{,}092 = +0{,}392$ tm
$M_3 = +0{,}2 + 0{,}364\,(-3{,}0) = -0{,}892$ tm
$M_4 = -0{,}1 + 0{,}364 \cdot 4{,}0 = +1{,}356$ tm

Catatan: Pada contoh 1 dan 2 momen M_{ik} oleh pergerakan δ (koefisien pergoyangan) adalah simetris (panjangnya dan momen lembam yang sama pada dua kaki konstruksi portal, batang 1-2 dan batang 3-4) oleh karena itu angka kekakuan batang $k_{1\text{-}2}$ dan $k_{3\text{-}4}$ menjadi sama juga.
Tetapi misalnya pada contoh konstruksi portal dua ruas dengan tumpuan berengsel atau terjepit menurut gambar 7. 2. 3 g. dan h. momen M_{ik} berlainan pada batang 1-2 dan batang 3-4.



Gambar 7. 2. 3. g.



Gambar 7. 2. 3. h.

Menurut rumus (7. 1.) kita boleh menentukan momen jepitan M_{ik} seperti berikut: (lihat gambar 7. 2. 3. h)

pada batang 1—2 (l) $\rightarrow M_{ik,l} = \frac{6E \cdot I_l \cdot \delta}{h_l^2} = \frac{6E \cdot k_l \cdot \delta}{h_l} \rightarrow \delta = \frac{M_{ik} \cdot h_l}{6E \cdot k_l}$

pada batang 3—4 (r) $\rightarrow M_{ik,r} = \frac{6E \cdot I_r \cdot \delta}{h_r^2} = \frac{6E \cdot k_r \cdot \delta}{h_r} \rightarrow \delta = \frac{M_{ik,r} \cdot h_r}{6E \cdot k_r}$

oleh karena δ pada titik simpul 2 dan δ pada titik simpul 3 harus sama, kita boleh menulis:

$$\frac{M_{ik,l} \cdot h_l}{6E \cdot k_l} = \frac{M_{ik,r} \cdot h_r}{6E \cdot k_r}$$

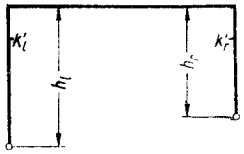
Atas dasar pengetahuan ini, kita bisa menentukan perbandingan antara $M_{ik,l}$ (momen jepitan sebelah kiri) dan $M_{ik,r}$ (momen jepitan sebelah kanan) seperti berikut:

$$\boxed{\frac{M_{ik,l}}{M_{ik,r}} = \frac{k_l}{h_l} : \frac{k_r}{h_r}} \qquad (7.5.)$$

pada konstruksi portal dengan dua ruas dengan tumpuan berengsel lihat pada gambar 7. 2. 3. g. kita menentukan:

$$\boxed{\frac{M_{ik,l}}{M_{ik,r}} = \frac{k'_l}{h_l} : \frac{k'_r}{h_r}} \qquad (7.6.)$$

Jikalau pada konstruksi portal dua ruas satu kaki tertumpu engsel dan kaki kedua terjepit seperti pada gambar 7. 2. 3. i. berikut, kita menentukan momen jepitan M_{ik} oleh pergerakan δ (koefisien pergoyangan) menurut rumus berikut:



Gambar 7. 2. 3. i.

menurut rumus (7. 1.) dan (7. 2.) momen jepitan M_{ik} adalah:

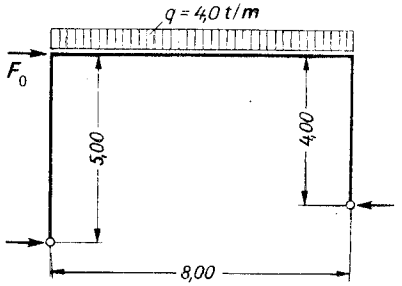
pada batang 1 - 2 (l) $\rightarrow M_{ik,l} = \dfrac{6\,E \cdot I_l \cdot \delta}{h_l^{\,2}} = \dfrac{6\,E \cdot k_l \cdot \delta}{h_l} \rightarrow \delta = \dfrac{M_{ik,l} \cdot h_l}{6\,E \cdot k}$

pada batang 3 - 4 (r) $\rightarrow M_{ik,r} = \dfrac{4\,E \cdot I_r \cdot \delta}{h_r^{\,2}} = \dfrac{4\,E \cdot k'_r \cdot \delta}{h_r} \rightarrow \delta = \dfrac{M_{ik,r} \cdot h_r}{4\,E \cdot k_r'}$

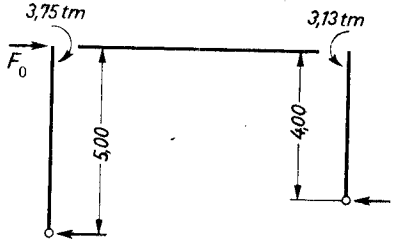
oleh karena pada titik simpul 2 dan δ pada titik simpul 3 δ harus sama kita bisa menentukan perbandingan antara momen jepitan $M_{ik,l}$ dan $M_{ik,r}$ seperti berikut:

$$\frac{M_{ik.l}}{M_{ik,r}} = \frac{3\,kl}{h_l} : \frac{2\,k_r'}{h_r} \qquad (7.7.)$$

Contoh 3: Pada contoh 2 (konstruksi portal dua ruas) lihat gambar 7. 1. 3. i. kita tidak mencari gaya pengikat horisontal F pada konstruksi portal dengan titik simpul yang kaku, melainkan dihitung sebagai konstruksi portal dengan titik simpul yang goyah.



Gambar 7. 2. 3. k.



Gambar 7. 2. 3. l.

Ukuran konstruksi portal, beban merata, tekanan angin, angka-angka kekakuan batang dan koefisien distribusi dsb. diambil dari contoh 2, bab 7. 1. 3.

Momen M_o adalah: $M_{o,2} = -\ 3.75$ tm
$M_{o,3} = -\ 3.13$ tm (lihat gambar 7. 3. 2. l.)

Gaya pengikat horisontal F_o bagi beban merata:

$$F_0 = -\frac{3{,}75}{5{,}0} + \frac{3{,}13}{4{,}0} = -\,0{,}75 + 0{,}78 = +\,0{,}03\ \text{t}$$

Gaya pengikat horisontal F_{ow} bagi tekanan angin sudah ditentukan di muka dengan $F_2 = -\ 3.71$ t.

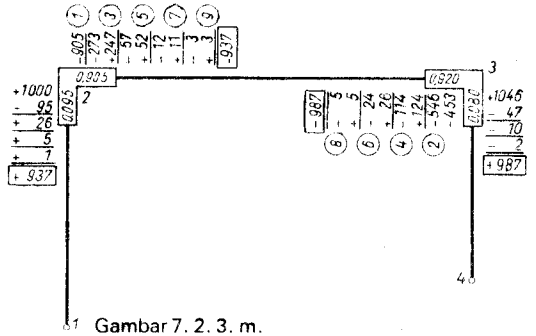
Sekarang kita memilih suatu pergerakan δ (koefisien pergoyangan) yang mengakibatkan satu momen $M_{ik,2} = 10$ tm. Jikalau titik simpul 2 bergerak oleh $M_{ik,2}$ sebesar δ, titik simpul 3 bergerak juga sebesar δ; menurut rumus (7. 6.) kita boleh menentukan:

$$\frac{M_{ik,2}}{M_{ik,3}} = \frac{k'_{1,2}}{h_{1,2}} : \frac{k'_{3,4}}{h_{3,4}} = \frac{240}{500} : \frac{201}{400} = \frac{0{,}48}{0{,}503}$$

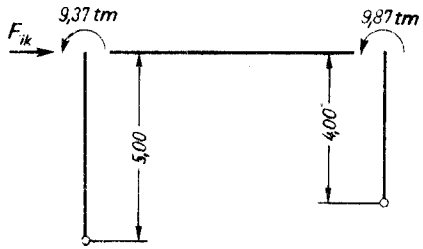
kemudian:

$$M_{ik,3} = M_{ik,2} \cdot \frac{0{,}503}{0{,}48} = 10{,}0 \cdot \frac{0{,}503}{0{,}48} = 10{,}46\ \text{tm}$$

Distribusi momen M_{ik} menurut Cross:



Gambar 7. 2. 3. m.



Gambar 7. 2. 3. n.

Momen M_{ik} adalah: $M_{ik,2} = +\ 9.37$ tm
$M_{ik,3} = -\ 9.87$ tm

Gaya pengikat horisontal F_{ik} oleh momen M_{ik}:

$$F_{ik} = +\frac{9{,}37}{5{,}00} + \frac{9{,}87}{4{,}00} = 1{,}874 + 2{,}47 = 4{,}34\ \text{t}$$

Menurut rumus (7. 3.) kita bisa menentukan $\bar{\mu}$:

$$\bar{\mu} = -\,F_0/F_{ik}$$

$$\bar{\mu} = -\frac{0{,}03}{4{,}34} = -\,0{,}0069 \approx 0$$

Oleh karena $\bar{\mu} \approx$ (hampir) nol pergoyangan pada konstruksi portal dua ruas ini karena beban merata (konstruksi atap) boleh dikatakan tidak ada.
Akan tetapi pergogyangan ada oleh beban (tekanan) angin. Menurut rumus (7. 3.) kita bisa menentukan $\bar{\mu}$:

$$\bar{\mu} = -\frac{(-3{,}7)}{4{,}34} = +\,0{,}85$$

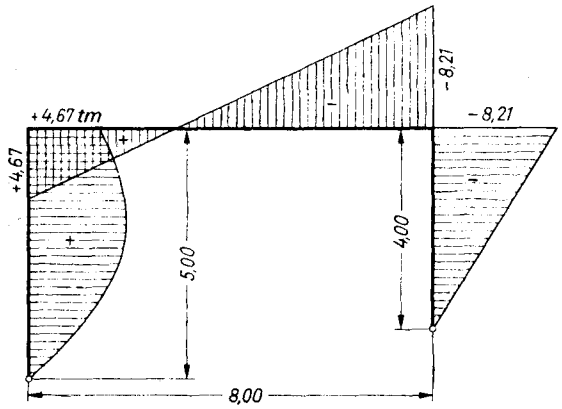
Momen M_0 sudah ditentukan pada gambar 7. 1. 3. m. dan 7. 1. 3. n. dengan:

$M_{0,2} = -3{,}29$ tm
$M_{0,3} = +0{,}18$ tm

Menurut rumus (7. 4.) kita bisa menentukan momen M_2 dan M_3 seperti berikut:

$$M = M_0 + \bar{\mu} \cdot M_{ik}$$
$$M_2 = -3{,}29 + 9{,}37 \cdot 0{,}85 = -3{,}29 + 7{,}96 = +4{,}67 \text{ tm}$$
$$M_3 = +0{,}18 - 9{,}87 \cdot 0{,}85 = +0{,}18 - 8{,}39 = -8{,}21 \text{ tm}$$

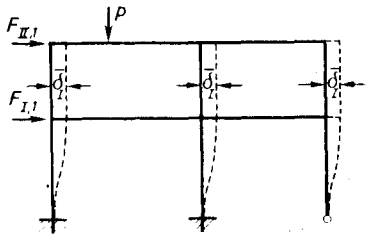
Perhatikan perobahan besar bagi momen ini kalau dibandingkan dengan momen M_0 dari portal dua ruas dengan titik simpul yang kaku.
Menggambar diagram momen $(M_0 + \mu \cdot M_{ik})$ oleh tekanan angin:



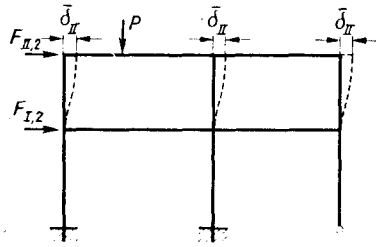
Gambar 7. 2. 3. o.

7. 2. 4. Konstruksi portal bertingkat dengan titik simpul yang goyah

Sistim perhitungan pada konstruksi portal dengan titik simpul yang goyah menjadi lebih sulit jikalau ada beberapa gaya pengikat horisontal (F_0). Misalnya pada konstruksi portal bertingkat pertama kita menggerakkan tingkat satu dengan koefisien pergoyangan $\bar{\delta}_I$. Selanjutnya kita memperhatikan tingkat satu sebagai kaku dan menggerakkan tingkat dua dengan koefisien pergoyangan $\bar{\delta}_{II}$ dsb. Pada prakteknya kita mulai perhitungan pada tingkat teratas dan menurun tingkat demi tingkat ke bawah.



Gambar 7. 2. 4. a.



Gambar 7. 2. 4. b.

Dengan memperhatikan perhitungan secara ini, kita boleh memenuhi rumus (7. 3.) dan rumus (7. 4.) seperti berikut:

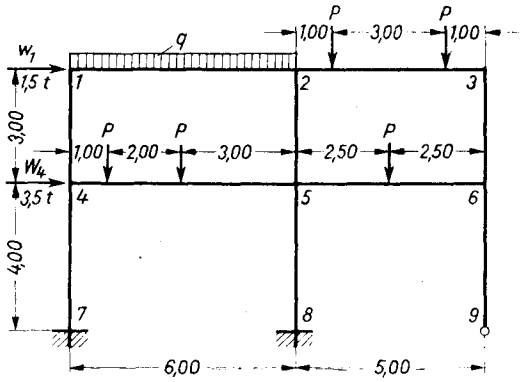
$$F_{I,0} + \bar{\mu}_1 \cdot F_{I,1} + \bar{\mu}_2 \cdot F_{I,2} = 0 \qquad (7.8.)$$

$$F_{II,0} + \bar{\mu}_1 \cdot F_{II,1} + \bar{\mu}_2 \cdot F_{II,2} = 0 \qquad (7.9.)$$

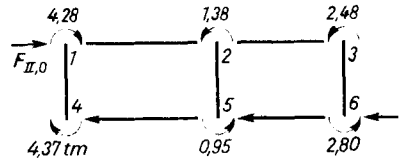
dengan faktor pergoyangan $\bar{\mu}_1$ dan $\bar{\mu}_2$ kita boleh menentukan M seperti berikut:

$$M = M_0 + \bar{\mu}_1 \cdot M_1 + \bar{\mu}_2 \cdot M_2 \qquad (7.10.)$$

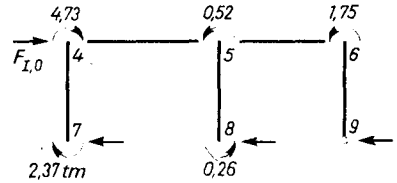
Contoh: Pada contoh 3, konstruksi portal bertingkat dengan titik simpul yang kaku, lihat gambar 7. 1. 3. o., kita tidak mempunyai lagi gaya pengikat horisontal $F_{o,I}$ dan $F_{o,II}$ melainkan suatu tekanan angin $W_1 = 1.5$ t dan $W_4 = 3.5$ t.
Ukuran portal, beban merata dsb., angka kekakuan batang dan koefisien distribusi masing-masing diambil juga pada contoh 3 bab 7. 1. 3. Gambar situasi dan gambar dengan momen masing-masing diperingatkan sebelah bawah:



Gambar 7. 2. 4. c.



Gambar 7. 2. 4. d.



Gambar 7. 2. 4. e.

Gaya pengikat horisontal $F_{I,o}$ dan $F_{II,o}$ oleh gaya dan beban yang vertikal menjadi:
$F_{II,o}$ oleh momen jepitan dari batang 1-4, 2-5 dan 3-6 menurut Gambar 7. 2. 4. d.

$$F_{II,o} = \frac{-4{,}28 - 4{,}37 + 1{,}38 + 0{,}95 + 2{,}48 + 2{,}80}{3{,}00} = -0{,}347\ \text{t}$$

$F_{I,o}$ oleh momen jepitan dari batang 4-7, 5-8 dan 6-9 menurut gambar 7. 2. 4. e.

$$F_{I,o} = +0{,}347 + \frac{-4{,}73 - 2{,}37 + 0{,}52 + 0{,}26 + 1{,}75}{4{,}00} = -0{,}796\ \text{t}$$

Gaya pengikat horisontal $F_{WI,o}$ dan $F_{WII,o}$ oleh gaya (tekanan) angin. Oleh karena tekanan angin W_1 dan W_4 membebani konstruksi portal ini pada titik simpul 1 dan 4, tekanan angin tidak mengakibatkan momen pada konstruksi portal ini, Gaya pengikat horisontal $F_{WI,o}$ dan $F_{WII,o}$ menjadi sama dengan W_1 dan W_4.

$$F_{WII,o} = -1{,}5\ \text{t} \qquad F_{WI,} = -3{,}5\ \text{t}$$

Perhitungan momen M_I dan M_{II} oleh pergerakan (koefisien pergoyangan) $\bar{\delta}_I$ dan $\bar{\delta}_{II}$ sembarang:
Atas penentuan koefisien pergoyangan $\bar{\delta}_I$ yang sembarang bagi tingkat satu pada konstruksi portal bertingkat ini, kita juga harus mencari koefisien pergoyangan $\bar{\delta}_{II}$ untuk tingkat dua untuk menentukan momen M_I dan M_{II} pada akhirnya.
Setindak demi setindak kita bisa menghitung seperti berikut:

Penentuan momen M_{II}:
Koefisien pergoyangan $\bar{\delta}_{II}$ sembarang pada titik simpul 1 mengakibatkan pada batang 1-4 suatu momen $M_{ik,1}$ dan $M_{ik,4} = +10$ tm.
Menurut rumus (7. 5.) kita boleh menghitung:

$$\frac{M_{ik,2}}{M_{ik,1}} = \frac{k_{2,5}}{h_{2,5}} : \frac{k_{1,4}}{h_{1,4}}$$

oleh karena $h_{2\text{-}5}$ sama dengan $h_{1\text{-}4}$ kita menentukan:

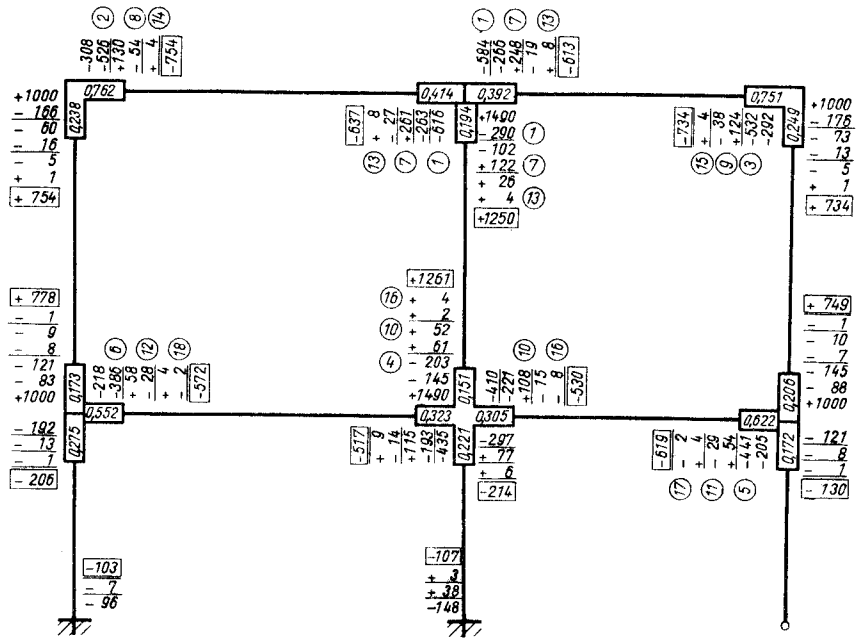
$$\frac{M_{ik,2}}{M_{ik,1}} = \frac{k_{2,5}}{k_{1,4}} \rightarrow M_{ik,2} = M_{ik,1} \cdot \frac{k_{2,5}}{k_{1,4}}$$

Menurut contoh 3 pada bab 7. 1. 3. angka kekakuan batang $k_{1\text{-}4} = 298$ dan $k_{2\text{-}5} = 444$, selanjutnya kita menentukan

$$M_{ik,2} = M_{ik,5} = 10.0 \cdot 444/298 = 14{,}90\ \text{tm}$$

Oleh karena angka kekakuan batang 3-6 sama dengan batang 1-4 kita boleh menentukan, bahwa $M_{ik,3} = M_{ik,6}$ juga menjadi 10 tm seperti juga $M_{ik,1}$ dan $M_{ik,4}$.

Distribusi momen M_{II} menurut Cross:



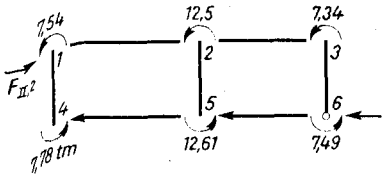
Gambar 7. 2. 4. f.

Atas dasar distribusi momen menurut Cross momen-momen M_{II} menjadi:

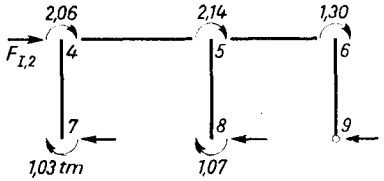
pada titik simpul 1:	batang 1 — 2 batang 1 — 4	=	+ 7.54 tm
pada titik simpul 2:	batang 2 — 1	=	— 6.37 tm
	batang 2 — 3	=	+ 6.13 tm
	batang 2 — 5	=	+ 12.50 tm
pada titik simpul 3:	batang 3 — 2 batang 3 — 6	=	— 7.34 tm
pada titik simpul 4:	batang 4 — 1	=	— 7.78 tm
	batang 4 — 5	=	+ 5.72 tm
	batang 4 — 7	=	— 2.06 tm
pada titik simpul 5:	batang 5 — 4	=	— 5.17 tm
	batang 5 — 2	=	— 12.61 tm
	batang 5 — 6	=	+ 5.30 tm
	batang 5 — 8	=	— 2.14 tm
pada titik simpul 6:	batang 6 — 5	=	— 6.19 tm
	batang 6 — 3	=	+ 7.49 tm
	batang 6 — 9	=	+ 1.30 tm

Nada tumpuan 7: = + 1.03 tm
Nada tumpuan 8: = + 1.07 tm

Gaya pengikat horisontal $F_{II,2}$ dan $F_{I,2}$ oleh M_{II}:



Gambar 7. 2. 4. g.



Gambar 7. 2. 4. h.

Menurut gambar 7. 2. 4. g. gaya pengikat horisontal $F_{II,2}$ menjadi:

$$F_{II,2} = \frac{7{,}54 + 7{,}78 + 12{,}50 + 12{,}61 + 7{,}34 + 7{,}49}{3{,}00} = 18{,}42\ \text{t}$$

dan menurut gambar 7. 2. 4. h. gaya $F_{I,2}$ menjadi:

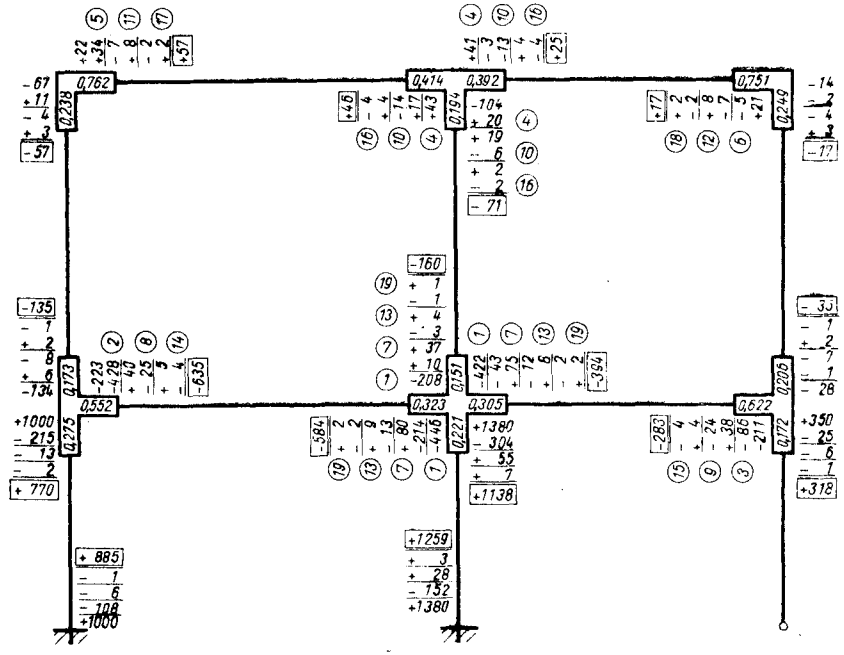
$$F_{I,2} = -18{,}42 + \frac{-2{,}06 - 1{,}03 - 2{,}14 - 1{,}07 - 1{,}30}{4{,}00} = -20{,}3\ \text{t}$$

Penentuan momen M_I:
Koefisien pergoyangan $\bar{\delta}_I$ sembarang pada titik simpul 4 mengakibatkan pada batang 4—7 pada titik simpul 4 dan 7 suatu momen $M_{ik,4} = M_{ik,7} = +10$ tm.
Menurut rumus (7. 5.) dan rumus (7. 7.) kita boleh menghitung:

$$M_{ik,5} = M_{ik,4} \cdot \frac{k_{5,8}}{k_{4,7}} = 10{,}00 \cdot \frac{651}{474} = 13{,}8\ \text{tm}$$

$$M_{ik,6} = M_{ik,4} \cdot \frac{2\,k'_{6,9}}{3\,k_{4,7}} = 10{,}00 \cdot \frac{2 \cdot 250}{3 \cdot 474} = 3{,}5\ \text{tm}$$

Distribusi momen M_I menurut Cross:



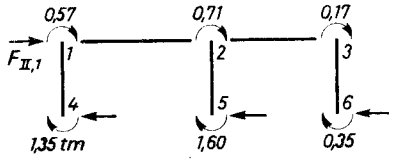
Gambar 7. 2. 4. i

Atas dasar distribusi momen menurut Cross, momen-momen M_I menjadi:

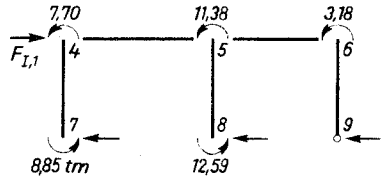
pada titik simpul 1: batang 1 — 2 } = — 0.57 tm
batang 1 — 4 }
pada titik simpul 2: batang 2 — 1 = + 0.46 tm
batang 2 — 3 = — 0.25 tm
batang 2 — 5 = — 0.71 tm
pada titik simpul 3: batang 3 — 2 } = + 0.17 tm
batang 3 — 6 }
pada titik simpul 4: batang 4 — 1 = + 1.35 tm
batang 4 — 5 = + 6.35 tm
batang 4 — 7 = + 7.70 tm
pada titik simpul 5: batang 5 — 4 = — 5.84 tm
batang 5 — 2 = + 1.60 tm
batang 5 — 6 = + 3.94 tm
batang 5 — 8 = + 11.38 tm
pada titik simpul 6: batang 6 — 5 = — 2.83 tm
batang 6 — 3 = — 0.35 tm
batang 6 — 9 = — 3.18 tm

pada tumpuan 7: = — 8.85 tm
pada tumpuan 8: = — 12.59 tm

Gaya pengikat horisontal $F_{II,1}$ dan $F_{I,1}$ oleh M_I:



Gambar 7. 2. 4. k.



Gambar 7. 2. 4. l.

menurut gambar 7. 2. 4. k. gaya pengikat horisontal $F_{II,1}$ menjadi:

$$F_{II,1} = \frac{-0,57-0,71-0,17-1,35-1,60-0,35}{3,00} = 1,58\,t$$

dan menurut gambar 7. 2. 4. l. gaya $F_{I,1}$ menjadi:

$$F_{I,1} = +1,58 + \frac{7,70+11,38+3,18+8,85+12,59}{4,00} = +12,51\,t$$

Penentuan faktor pergoyangan $\bar{\mu}_1$ dan $\bar{\mu}_2$:
Faktor-faktor pergoyangan $\bar{\mu}_1$ dan $\bar{\mu}_2$ bisa diperhitungkan dengan penggunaan rumus (7. 8.) dan rumus (7. 9.) seperti berikut:

$$F_{I,0} + \bar{\mu}_1 \cdot F_{I,1} + \bar{\mu}_2 \cdot F_{I,2} = 0$$
$$F_{II,0} + \bar{\mu}_1 \cdot F_{II,1} + \bar{\mu}_2 \cdot F_{II,2} = 0$$

a) dengan hasil pada gaya dan beban vertikal:

$-0,796 + \bar{\mu}_1 \cdot 12,51 + \bar{\mu}_2 \cdot (-20,3) = 0 \qquad \bar{\mu}_1 = 0,1094$
$-0,347 + \bar{\mu}_1 \cdot (-1,58) + \bar{\mu}_2 \cdot 18,42 = 0 \qquad \bar{\mu}_2 = 0,0282$

b) dengan hasil pada gaya (tekanan) angin:

$-3,5 + \bar{\mu}_1 \cdot 12,51 + \bar{\mu}_2 \cdot (-20,3) = 0 \qquad \bar{\mu}_1 = 0,479$
$-1,5 + \bar{\mu}_1 \cdot (-1,58) + \bar{\mu}_2 \cdot 18.42 = 0 \qquad \bar{\mu}_2 = 0,123$

Momen-momen oleh beban vertikal sebetulnya bisa ditentukan menurut rumus (7. 10.) seperti berikut:

$$M = M_0 + \bar{\mu}_1 \cdot M_I + \bar{\mu}_2 \cdot M_{II}$$

Momen M_0 diambil pada contoh 3 di bawah gambar 7. 1. 3. p.

Momen pada titik simpul 1:
batang 1 — 2 = — 4,28 + 0,1094 · (— 0,57) + 0,0282 · (+ 7,54) = — 4,13 tm
batang 1 — 4 = — 4,28 + 0,1094 · (— 0,57) + 0,0282 · (+ 7,54) = — 4,13 tm

Momen pada titik simpul 2:
batang 2 — 1 = — 13,95 + 0,1094 · (+ 0,46) + 0,0282 · (— 6,37) = — 14,08 tm
batang 2 — 3 = — 12,57 + 0,1094 · (— 0,25) + 0,0282 · (+ 6,13) = — 12,43 tm
batang 2 — 5 = + 1,38 + 0,1094 · (— 0,71) + 0,0282 · (+ 12,50) = + 1,65 tm

Momen pada titik simpul 3:
batang 3 — 2 = — 2,48 + 0,1094 · (+ 0,17) + 0,0282 · (— 7,34) = — 2,67 tm
batang 3 — 6 = — 2,48 + 0,1094 · (+ 0,17) + 0,0282 · (— 7,34) = — 2,67 tm

Momen pada titik simpul 4:
batang 4 — 1 = + 4,37 + 0,1094 · (+ 1,35) + 0,0282 · (— 7,78) = + 4,30 tm
batang 4 — 5 = — 9,10 + 0,1094 · (+ 6,35) + 0,0282 · (+ 5,72) = — 8,24 tm
batang 4 — 7 = — 4,73 + 0,1094 · (+ 7,7) + 0,0282 · (— 2,06) = — 3,95 tm

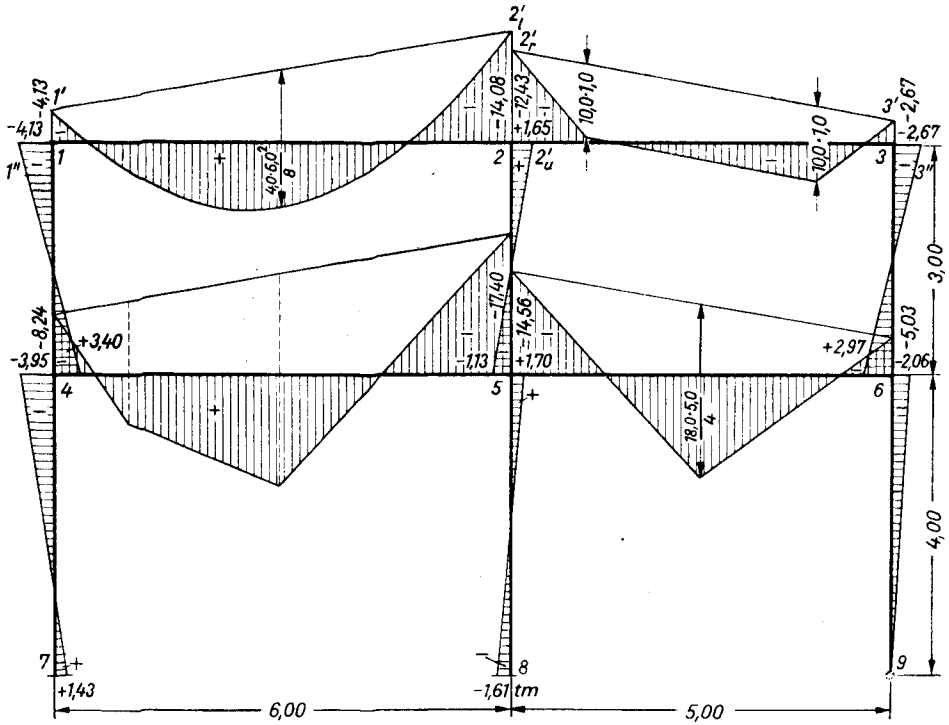
Momen pada titik simpul 5:
batang 5 — 4 = — 16,61 + 0,1094 · (— 5,84) + 0,0282 · (— 5,17) = — 17,40 tm
batang 5 — 2 = — 0,95 + 0,1094 · (+ 1,6) + 0,0282 · (— 12,61) = — 1,13 tm
batang 5 — 6 = — 15,14 + 0,1094 · (+ 3,94) + 0,0282 · (+ 5,30) = — 14,56 tm
batang 5 — 8 = + 0,52 + 0,1094 · (+ 11,38) + 0,0282 · (— 2,14) = + 1,70 tm

Momen pada titik simpul 6:
batang 6 — 5 = — 4,55 + 0,1094 · (— 2,83) + 0,0282 · (— 6,19) = — 5,03 tm
batang 6 — 3 = + 2,80 + 0,1094 · (— 0,35) + 0,0282 · (+ 7,49) = + 2,97 tm
batang 6 — 9 = — 1,75 + 0,1094 · (— 3,18) + 0,0282 · (+ 1,30) = — 2,06 tm

Momen pada tumpuan 7:
M_7 = + 2,37 + 0,1094 . (— 8,85) + 0,0282 . (+ 1,03) = + 1,43 tm

Momen pada tumpuan 8:
M_8 = — 0,26 + 0,1094 . (— 12,59) + 0,0282 . (+ 1,07) = — 1,61 tm

Gambar diagram momen oleh gaya dan beban vertikal:



Gambar 7. 2. 4. m.

Momen-momen oleh tekanan angin yang sebetulnya bisa ditentukan juga menurut rumus (7. 10), perlu hanya diperhatikan, bahwa $M_o = 0$.

Momen pada titik simpul 1:
batang 1 — 2 = 0,479 · (— 0,57) + 0,123 · (+ 7,54) = + 0,65 tm
batang 1 — 4 = + 0,62 tm

Momen pada titik simpul 2:
batang 2 — 1 = 0,479 · (+ 0,46) + 0,123 · (+ 6,37) = — 0,56 tm
batang 2 — 3 = 0,479 · (— 0,25) + 0,123 · (+ 6,13) = + 0.63 tm
batang 2 — 5 = 0,479 · (— 0,71) + 0,123 · (— 12,50) = + 1,20 tm

Momen pada titik simpul 3:
batang 3 — 2 = 0,479 · (+ 0,17) + 0,123 · (— 7,23) = — 0,82 tm
batang 3 — 6 = — 0,73 tm

Momen pada titik simpul 4:
batang 4 — 1 = 0,479 · (+ 1,35) + 0,123 · (— 7,78) = — 0,31 tm
batang 4 — 5 = 0,479 · (+ 6,35) + 0,123 . (+ 5,72) = + 3,74 tm
batang 4 — 7 = 0,479 · (+ 7,70) + 0,123 · (— 2,06) = + 3,44 tm

Momen pada titik simpul 5:
batang 5 — 4 = 0,479 · (— 5,84) + 0,123 · (— 5,17) = — 3,42 tm
batang 5 — 2 = 0,479 · (+ 1,6) + 0,123 · (— 12,61) = — 0,78 tm
batang 5 — 6 = 0,479 · (+ 3,94) + 0,123 · (+ 5,3) = + 2,54 tm
batang 5 — 8 = 0.479 · (+ 11,38) + 0.123 · (— 2,14) = + 5.18 tm

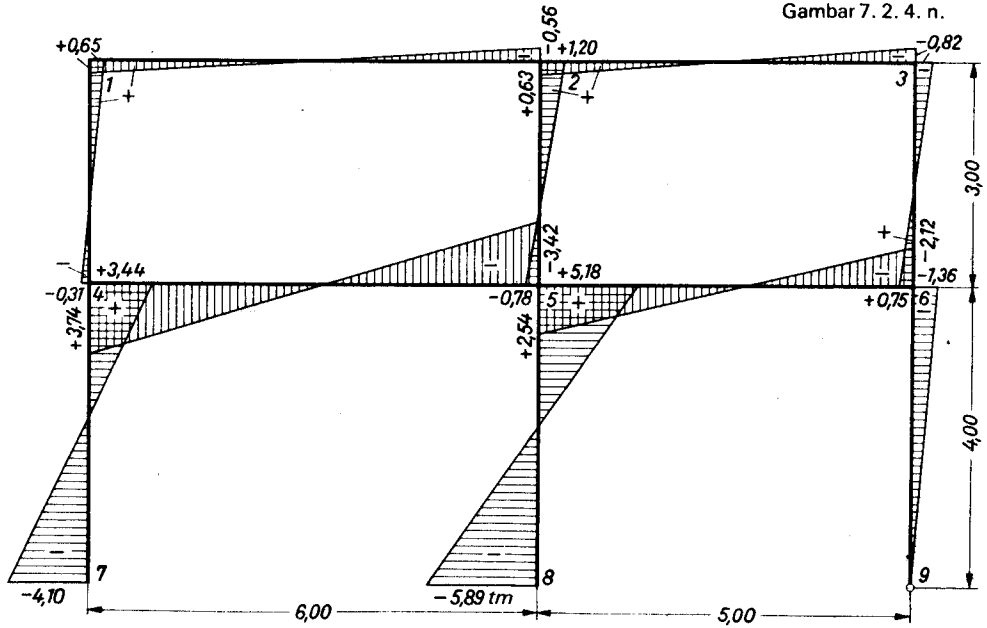
Momen pada titik simpul 6:
batang 6 — 5 = 0,479 · (— 2,83) + 0,123 · (— 6,19) = — 2,12 tm
batang 6 — 3 = 0,479 · (— 0,35) + 0,123 · (+ 7,49) = + 0,75 tm
batang 6 — 9 = 0,479 · (— 3,18) + 0,123 · (+ 1,3) = — 1,36 tm

Momen pada tumpuan 7:
M_7 = 0,479 · (— 8,85) + 0,123 · (+ 1,03) = — 4,10 tm

Momen pada tumpuan 8:
M_8 = 0,479 · (— 12,59) + 0,123 · (+ 1,07) = — 5,89 tm

Gambar diagram momen oleh gaya (tekanan) angin:

Gambar 7. 2. 4. n.



8. Perubahan bentuk elastis

8. 1. Pengetahuan dasar

Pada bab 2. (Ilmu inersia dan ketahanan) sudah ada beberapa ketentuan dan rumus tentang perubahan bentuk. Dengan pengetahuan itu, terutama bab 2. 3. 2. (Gaya torsi) dan 2. 8. (Perhitungan lendutan dan garis elastis), kita bisa menghitung lendutan dan putaran pada konstruksi batang dengan garis sumbu yang lurus. Pada perhitungan perubahan bentuk untuk konstruksi rangka batang dan untuk konstruksi dengan sistim statis tidak tertentu kita dalam bab ini mencari metode-metode untuk menentukan perubahan bentuk pada konstruksi-konstruksi dalam bidang. Selanjutnya kita terutama memperhatikan perubahan bentuk elastis, sedang hubungan hubungan teoretis hanya diberikan sedikit saja, menurut keperluan dan secara umum.
Teori-teori tentang perubahan bentuk elastis yang lebih luas dan lebih dalam membutuhkan keluasan studi/mata kuliah jurusan arsitektur.
Berikut daftar perubahan bentuk dalam alasan yang bisa mengakibatkannya:

Perubahan panjangnya	Gaya normal perubahan suhu seragam
Lendutan	Momen lentur Gaya lintang Suhu yang berbeda pada sisi atas dan sisi bawah pada suatu konstruksi batang
Pemutaran	Gaya torsi

Pada konstruksi batang dan rangka batang momen torsi tidak timbul, karena itu selanjutnya kita membatasi diri pada pembicaraan tentang pemutaran. Juga pada bab 2. (Ilmu inersia dan ketahanan), kita telah mempelajari, bahwa pengaruh gaya lintang pada lebar bentang dan ukuran balok yang biasa, pada umumnya kecil sekali. Karena itu selanjutnya kita juga membatasi diri pada pembicaraan tentang hal itu dalam buku ini. Pada umumnya kita hanya memperhatikan gaya normal, momen lentur dan perbedaan suhu untuk menentukan perubahan bentuk, dan terutama yang harus diperhatikan ialah lendutan.

Dengan pengetahuan yang ada sampai sekarang kita hanya bisa menentukan lendutan pada balok tunggal menurut bab 2. 8. (Perhitungan lendutan dan garis elastis). Untuk perhitungan lendutan pada konstruksi rangka batang misalnya belum ada pengetahuan dasar.
Pada bab-bab berikut kita menentukan cara untuk memperhitungkan perubahan bentuk elastis tidak hanya pada konstruksi batang dan rangka batang melainkan juga perubahan titik simpul pada tiap jurusan sembarang.

8. 2. Teori tentang kerja virtual

8. 2. 1. Kerja virtual

Asas tentang kerja virtual ditemukan oleh *Lagrange* pada tahun 1788. Tetapi harus dikatakan, bahwa pada prinsipnya kerja virtual sudah diketahui lebih dahulu. Mengenai asas kerja virtual kita mengakui bahwa ini bukan satu ketentuan atau perjanjian, oleh karena dalam beberapa hal asas ini tidak mungkin dibuktikan. Akan tetapi dari penggunaan dan pengalaman kebenaran asas tentang kerja virtual sebetulnya sudah cukup dibuktikan. Ada beberapa buku ilmu mekanika teknik yang menerangkan seluruh statika atas dasar asas tentang kerja virtual, kebalikan dengan misalnya buku ini, yang menerangkan dasar-dasar statika atas jajaran (belah ketupat) gaya-gaya.
Selanjutnya penerangan mengenai asas kerja virtual langsung mulai pada konstruksi batang dan rangka batang dalam bidang, oleh karena bagi kita dalam buku ini yang penting ialah prakteknya. Oleh karena itu asas tentang kerja virtual pada suatu titik atau suatu benda dalam ruang kita terbatas.
Kata 'virtual' dari bahasa latin = virtus = kemungkinan, kemampuan, mengandung maksud, bahwa pergeseran/pergerakan dalam jurusan sembarang harus mungkin, akan tetapi hubungan antara bagian-bagian konstruksi batang atau rangka batang tidak boleh terusakkan.

Sebagai keterangan kita membayangkan suatu konstruksi batang atau rangka batang dikenai gaya-gaya P_k dan momen-momen M_k.
Gaya-gaya dan momen-momen ini menjadi satu kumpulan yang seimbang. Kita boleh mengatakan:

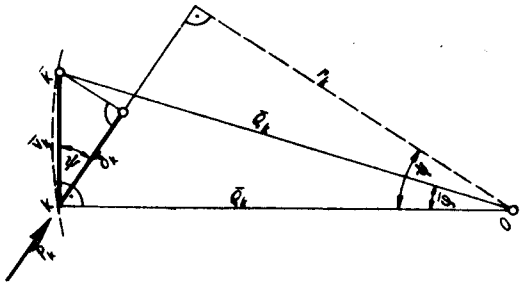
$$\sum_1^n P_k = 0 \qquad \sum_1^n P_k r_k + \sum_1^n M_k = 0$$

Dalam rumus ini r_k menjadi jarak siku-siku dari gaya P_k dan suatu titik kutub sembarang. Perubahan bentuk pada konstruksi batang atau rangka batang mengakibatkan pergeseran δ dan perputaran φ, pergeseran titik simpul k yang bertepatan dengan jurusan gaya-gaya P_k disebutkan sebagai δ_k.
Selanjutnya kita membayangkan beban konstruksi batang atau rangka batang oleh suatu kumpulan gaya virtual. Untuk gaya-gaya virtual dan momen-momen virtual ini kita boleh juga mengatakan:

$\sum_1^n \bar{P}_k = 0 \qquad \sum_1^n \bar{P}_k r_k + \sum_1^n \bar{M}_k = 0$

Selanjutnya kita menyebutkan semua gaya, momen, ukuran atau nilai yang berhubungan dengan kumpulan gaya virtual dengan garis melintang di atas huruf-nya. Oleh kumpulan gaya virtual titik simpul k mengalami suatu pergeseran virtual $\bar{\delta}_k$. Tergantung pada bentuk dan cara konstruksi batang atau rangka batang dan menurut besarnya kumpulan gaya virtual, pergeseran virtual bisa amat kecil. Batasan ini sebetulnya suatu keharusan supaya jurusan gaya-gaya P_k tidak mengalami perubahan.

Pada gambar (8. 2. 1. a.) berikut kita melihat suatu titik simpul k pada suatu konstruksi batang atau rangka batang dikenai gaya-gaya P_k (resultante). Oleh beban kumpulan gaya virtual titik simpul k mengalami pergeseran ke $\bar{k}$. Karena penggeseran lurus $\bar{v}_k$ menjadi amat kecil kita juga boleh mengatakan, bahwa penggeseran itu menjadi satu sektor lingkaran dengan jari-jari $\bar{\varrho}_k$, atau dengan kata-kata lain, tiap pergeseran yang amat kecil boleh juga ditentukan sebagai suatu putaran $\bar{\varphi}$ pada suatu titik kutub O.



Gambar 8. 2. 1. a.

Pada persamaan keseimbangan di atas titik kutub masih sembarang.

Pada gambar 8. 2. 1. a. dipilih titik kutub O dan boleh dikatakan:

$\bar{v}_k = \bar{\varrho}_k \bar{\varphi}$

$\bar{\delta}_k = \bar{v}_k \cos \Psi$

$r_k = \bar{\varrho}_k \cos \Psi$

$\bar{\delta}_k = \bar{\varrho}_k \bar{\varphi} \cos \Psi = r_k \bar{\varphi}$

$r_k = \dfrac{\bar{\delta}_k}{\bar{\varphi}}$

hasil-hasil ini bisa diisikan pada rumus $\Sigma M = 0$ tadi, maka terdapat rumus (8. 1.):

$$\sum_1^n P_k \bar{\delta}_k + \sum_1^n M_k \bar{\varphi} = 0 \qquad (8.1.)$$

Menurut ketentuan ilmu alam suatu hasil kali di bawah satu angka jumlah Σ adalah suatu kerja. Oleh karena kerja ini diakibatkan oleh suatu kumpulan gaya virtual kita menamakan kerja ini kerja virtual.

Jikalau gaya virtual dan pergeseran berjurusan sama atau momen virtual dan perputaran jurusannya sama, kerja virtual menjadi positif (+) jikalau berlawanan menjadi negatif (−).

Rumus (8. 1.) menentukan, bahwa jumlah semua kerja virtual menjadi nol, atau dengan kata-kata lain:

Jikalau suatu konstruksi batang atau rangka batang yang menerima beban, gaya dan momen menjadi seimbang, seharusnya jumlah pergeseran oleh kerja virtual yang amat kecil (jumlah gaya virtual dan jumlah momen virtual) menjadi nol.

Antara gaya-gaya P_k dan momen-momen M_k yang diterima oleh konstruksi batang atau rangka batang, dan gaya virtual $\bar{P}_k$ dan momen virtual $\bar{M}_k$ tidak ada hubungan. Hanya dasar-dasarnya yang sama yang menentukan bahwa jumlahnya harus seimbang.

Giliran ini boleh juga dibalik, sehingga pertama kumpulan kerja virtual mengenai konstruksi batang atau rangka batang, dan pergeseran diakibatkan oleh kumpulan gaya P_k dan momen M_k. Ketentuannya tidak diubah, dan hasilnya seperti berikut:

$$\sum_1^n \bar{P}_k \delta_k + \sum_1^n \bar{M}_k \varphi = 0 \qquad (8.2.)$$

Rumus (8. 2.) boleh digunakan untuk menentukan komponen perubahan bentuk oleh suatu kejadian perubahan bentuk yang tertentu dan oleh suatu kejadian perubahan bentuk sembarang. Isi rumus ini dinamakan sebagai asas kerja virtual. Rumus ini menjadi dasar perhitungan-perhitungan perubahan bentuk pada sistim statis tidak tertentu.

Sebagai kebalikan dari dasar itu kita bisa mengatakan selanjutnya:

Jikalau pada suatu pergeseran virtual sembarang pada suatu konstruksi batang atau rangka batang jumlah semua pekerjaan dan jumlah semua gaya menjadi nol, gaya-gaya itu berarti dalam keseimbangan.

8. 2. 2. Persamaan kerja pada konstruksi batang

Pandangan-pandangan dari bab 8. 2. 1. yang umum kita lanjutkan pada konstruksi batang. Pada bab 8. 2. 1. ditentukan, bahwa jumlah gaya dalam dan gaya luar seimbang. Juga pada konstruksi batang jumlah kerja virtual harus menjadi nol. Ini berarti, bahwa kerja virtual luar A_a menjadi sama dengan kerja virtual dalam A_i.

Selanjutnya kita perhatikan kerja virtual luar. Sampai pada saat ini belum ada ketentuan apa pun bagi gaya virtual baik banyaknya maupun ukurannya. Sebetulnya suatu gaya $\bar{P}$ atau yang berhubungan dengan satu momen $\bar{M}$ dengan reaksi-reaksi tumpuannya sudah mencukupi untuk penentuan nilai beban virtual. Pada umumnya dianggap $\bar{P} = 1.0$ atau $\bar{M} = 1.0$ maka kita katakan:

$$A_a = \bar{1{,}0}\,\delta_k + \Sigma\bar{C}c = A_i \quad \text{dengan} \quad \bar{P}_k = 1{,}0$$

$$A_a = \bar{1{,}0}\,\varphi_k + \Sigma\bar{C}c = A0_i \quad \text{dengan} \quad \bar{M}_k = 1{,}0$$

Nilai $\bar{C}$ pada penentuan ini menjadi reaksi tumpuan oleh beban virtual dan c menjadi pergeseran tumpuan pada arah (jurusan) reaksi tumpuan. Penentuan ini boleh juga diubah dengan hasil berikut:

$$\bar{1{,}0}\,\delta_k = A_i - \Sigma\bar{C}c \quad ; \quad \bar{1{,}0}\,\varphi_k = A_i - \Sigma\bar{C}c$$

Pergeseran pada titik simpul k sebetulnya adalah kerja virtual dalam, dikurangi dengan kerja virtual tumpuannya. Kemudian kita harus menentukan kerja virtual dalam. Oleh karena kerja virtual luar menjadi hasil kali gaya virtual luar dan penggeseran yang sebenarnya. Atas dasar ini boleh kita katakan, bahwa kerja virtual dalam seharusnya hasil kali beban virtual dan perubahan bentuk yang sebenarnya. Selanjutnya kita menentukan kerja virtual dalam oleh pengaruh masing-masing.

1. Gaya normal

Perubahan memanjang pada suatu batang oleh gaya normal dapat ditentukan dengan:

$$\Delta s = \frac{N}{EF}s$$

Baiklah kita meneliti rumus ini oleh karena memang mungkin gaya normal (N) atau luas batang (F) tidak menjadi tetap pada seluruh panjang (s) dari batang itu, maka kita menulis:

$$\Delta s = \int \mathrm{d}\Delta s = \int \frac{N}{EF}\,\mathrm{d}s$$

kerja virtual dalam oleh gaya normal boleh kita tentukan sebagai berikut:

$$\boxed{A_{iN} = \int \frac{N\bar{N}}{EF}\,\mathrm{d}s} \qquad (8.3.)$$

2. Momen lentur

Oleh pembebanan dengan momen lentur maka batang akan melengkung. Perubahan bentuk oleh sudut putar φ pada garis elastis boleh ditentukan seperti berikut:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\,;\ \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI}\,;\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{M}{EI} \qquad \text{dan} \qquad \varphi = \int \frac{M}{EI}\,\mathrm{d}s$$

kerja virtual dalam oleh momen lentur boleh kita tentukan sebagai berikut:

$$\boxed{A_{iM} = \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,\mathrm{d}s} \qquad (8.4.)$$

3. Perubahan suhu seragam (t_s)

Perubahan panjangnya batang oleh perubahan suhu seragam adalah:

$$\Delta s = \alpha_t t_s s \qquad \text{atau:} \qquad \Delta s = \int \alpha_t t_s \mathrm{d}s$$

kerja virtual dalam oleh perubahan suhu seragam boleh kita tentukan sebagai berikut:

$$\boxed{A_{its} = \int \bar{N}\alpha_t t_s \mathrm{d}s} \qquad (8.5.)$$

4. Suhu yang berbeda pada sisi atas dan sisi bawah pada konstruksi batang (Δt)

Oleh suhu yang berbeda pada sisi atas dan sisi bawah maka batang akan melengkung. Perubahan bentuk oleh sudut putar φ pada garis elastis boleh ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,;\ \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \qquad \text{dan} \qquad \varphi = \int \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,\mathrm{d}s$$

kerja virtual dalam oleh suhu yang berbeda pada sisi atas dan sisi bawah boleh kita tentukan sebagai berikut:

$$\boxed{A_{i\Delta t} = \int \bar{M}\,\frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,\mathrm{d}s} \qquad (8.6.)$$

5. Gaya lintang

Walaupun kita menentukan atas dasar bab 8. 1., bahwa pengaruh gaya lintang terlalu kecil dan boleh diabaikan, kita menentukan selanjutnya kerja virtual dalam. Pergeseran pada garis sumbu oleh gaya lintang adalah:

$$w = \int \frac{\varkappa Q}{GF}\, ds$$

kerja virtual dalam oleh gaya lintang boleh kita tentukan sebagai berikut:

$$A_{iQ} = \int \frac{\varkappa Q \bar{Q}}{GF}\, ds \qquad (8.7.)$$

Dengan begitu kita sudah mengetahui masing-masing bagian dari kerja virtual dalam. Persamaan kerja pada konstruksi batang dibaca seperti berikut:

$$\bar{1},0\,\delta_k = \int \frac{M\bar{M}}{EI}\, ds + \int \frac{N\bar{N}}{EF}\, ds = \int \frac{\varkappa Q\bar{Q}}{GF}\, ds = \int \bar{N}\alpha_t t_s ds + \int \bar{M}\,\frac{\alpha_t \Delta t}{h}\, ds - \Sigma \bar{C}c$$

(8.8.)

Sebetulnya faktor. $\bar{1}.\bar{0}$ pada sebelah kiri boleh dihapuskan oleh karena tidak ada pengaruh atas hasil persamaan kerja ini, walaupun kita tidak boleh lupa, bahwa faktor $\bar{1}.\bar{0}$ sebelah kiri menjadi kerja virtual luar.

Pada persamaan kerja pada konstruksi batang ini masing-masing bagian berarti:

M, N, Q	Momen, gaya normal, gaya lintang pada titik x oleh beban yang sebenarnya
$\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}$	Momen, gaya normal, gaya lintang pada titik x oleh beban virtual $\bar{P}_k = 1.0$ atau $\bar{M}_k = 1.0$ pada titik ke arah δ_k atau dengan sudut φ_k
$\bar{C}$	Reaksi tumpuan oleh beban virtual
c	Pergeseran sebenarnya dari titik tumpuan dalam jurusan reaksi tumpuan (pada umumnya menjadi nol)
t_s	Perubahan suhu seragam
Δt	Perbedaan suhu antara sisi atas dan sisi bawah pada suatu batang
h	Tinggi balok (batang)
s	Panjangnya balok (batang)
ds	Sebagian dari batang yang amat kecil
$I, F, E,$	Momen lembam, luas batang dan modul elastis pada batang
G	Modul pergeseran (lihat bab 2. 3. 1.)
αt	1/°C angka penguluran suhu
$\varkappa$	faktor koreksi (kappa) bagi gaya lintang, oleh karena gaya lintang sebetulnya tidak tetap pada tingginya bentuk batang. Nilai tergantung pada bentuk (misalnya bagi bentuk segiempat sejajar $\varkappa = 1.2$)

Dengan bantuan rumus (8. 8.) kita bisa menentukan pergeseran δ_k pada suatu titik k pada satu konstruksi batang di bawah pengaruh momen lentur, gaya normal, gaya lintang dan perubahan suhu. Selanjutnya kita menentukan masing-masing diagram gaya lintang, gaya normal dan momen oleh beban sebenarnya (dasar) dan selanjutnya kita tentukan diagram masing-masing tsb. oleh gaya virtual $\bar{P}_k = 1.0$. Pada waktu itu gaya virtual $\bar{P}_k = 1.0$ bekerja pada titik dan jurusan pergeseran δ_k yang dicari.

Jikalau kita mencari perputaran φ_k garis sumbu batang pada titik k kita juga boleh menggunakan rumus (8. 8.). Sekarang hanya kita pasang momen virtual $\bar{M}_k = 1.0$ pada titik dan jurusan putaran yang dicari. Bagi beban ini kita menentukan diagram masing-masing tersebut.

Momen, gaya normal dan gaya lintang berhubungan dengan suatu bagian batang yang amat kecil (ds) pada suatu titik sembarang. M, N, Q dan $\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}$ menentukan nilai-nilai pada titik x pada suatu konstruksi batang. Pada perhitungan integral fungsi-fungsi pada tiap-tiap gaya harus dikalikan sebelum diintegralkan. Pengintegralan berhubungan dengan seluruh panjangnya konstruksi batang. Pengintegralan itu mula-mula kita rasa agak sulit. Akan tetapi pada pembebanan yang biasa timbul, kita mempunyai tabel-tabel yang sudah diintegralkan pada lampiran I. 2. dan penggunaannya dapat diterangkan pada bab 8. 2. 4. (Hasil pengintegralan pada kerja virtual).

Persamaan kerja pada konstruksi batang (8. 8.) diisi semua kemungkinan pembebanan pada konstruksi batang dalam bidang. Suatu perubahan tumpuan tidak terjadi selalu, dan pengaruh pada suatu perubahan suhu biasanya diperhitungkan terpisah. Pengaruh pada gaya normal dan gaya lintang, seperti sudah dikatakan pada bab 8. 1. (Pengetahuan dasar) biasanya boleh diabaikan. Atas dasar ini, selanjutnya tinggallah suatu rumus yang jauh lebih sederhana:

$$\bar{1},0\,\delta_k = \int \frac{M\bar{M}}{EI}\, ds$$

Jikalau kita perhatikan momen lembam I yang tidak tetap, kita isikan suatu perbandingan momen lembam I_c/I ke dalam rumus yang tadi seperti pada syarat persamaan tiga momen (Clapeyron) (6. 49.) atau pada bab 2. 8. (Perhitungan lendutan dan garis elastis) dan menghasilkan:

$$\bar{1},0\,E\,I_c\,\delta_k = \int M\bar{M}\,\frac{I_c}{I}\, ds \qquad (8.9.)$$

Biasanya digunakan hanya persamaan kerja pada konstruksi batang ini untuk menentukan pergeseran pada konstruksi batang. Pada bab 8. 4. 1. (Pergeseran dan perputaran pada konstruksi batang) kita mendapatkan beberapa contoh yang menggunakan persamaan kerja pada konstruksi batang (8. 8) dan (8. 9.).

8. 2. 3. Persamaan kerja pada konstruksi rangka batang

Atas dasar pengetahuan persamaan kerja pada konstruksi batang kita bisa dengan mudah menentukan persamaan kerja pada konstruksi rangka batang. Pada konstruksi rangka batang tidak ada momen lentur dan gaya lintang. Gaya normal, pada konstruksi rangka batang ditentukan sebagai gaya batang S dan $\bar{S}$ menjadi tetap pada seluruh panjangnya batang s, dan oleh karena itu tidak perlu lagi menghitung dengan integral. Selanjutnya cukup jikalau dihitung dengan Σ (jumlah) batang dan beban.

Maka persamaan kerja pada konstruksi rangka batang dibaca sebagai berikut:

$$\bar{1},0\,\delta_k = \Sigma \frac{S\bar{S}}{EF}\,s + \Sigma \bar{S}\alpha_t t_s s - \Sigma \bar{C}c \qquad (8.\,10.)$$

Pada persamaan kerja pada konstruksi rangka batang ini masing-masing bagian berarti:

S gaya normal pada batang yang sebenarnya

$\bar{S}$ gaya normal pada batang oleh beban virtual $\bar{P}_k = 1.0$ pada titik simpul k pada jurusan pergeseran δ_k

s panjangnya batang masing-masing

Bagian-bagian yang lain sama seperti pada bab 8. 2. 2. Persamaan kerja pada konstruksi batang (8. 8.). Oleh karena sekarang kita memperhatikan konstruksi rangka batang kita harus mengawasi, bahwa gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ tidak bekerja lagi pada suatu titik k sembarang, melainkan pada suatu titik simpul k.

Untuk menentukan pergeseran δ_k, kita pertama-tama dengan bantuan Cremona atau Cullmann-Ritter mencari gaya batang S masing-masing yang sebenarnya. Selanjutnya sekali lagi untuk mencari gaya batang $\bar{S}$ masing-masing oleh gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ pada titik simpul k, yaitu pada titik simpul yang akan kita cari pergeserannya δ_k. Kemudian kita meng-superposisikan-kan dua hasil ini pada batang masing-masing.

Seperti sudah ditentukan pada bab 8. 2. 2. (Persamaan kerja pada konstruksi batang) kita boleh menyederhanakan persamaan kerja pada konstruksi rangka batang (8. 10.) seperti berikut:

$$\bar{1},0 E F_c \delta_k = \Sigma S\bar{S}\frac{F_c}{F}\,s \qquad (8.\,11.)$$

Pada bab 8. 4. 2. (Pergeseran pada konstruksi rangka batang) kita mendapat contoh yang menggunakan persamaan kerja pada konstruksi rangka batang (8. 10.) dan (8. 11.).

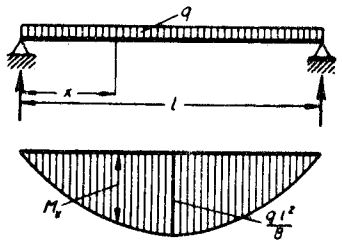
8. 2. 4. Hasil pengintegralan pada kerja virtual

Pertama kita menghitung pergeseran dengan bantuan persamaan kerja pada konstruksi batang pada suatu contoh sederhana. Kita akan menentukan lendutan pada pertengahan suatu balok tunggal dengan momen lembam I tetap dan beban merata q. (lihat gambar 8. 2. 4. a.).

Pada contoh ini kita mendapat momen lentur dan gaya lintang, yang pada contoh ini kita abaikan. Oleh karena pada contoh ini tidak ada perubahan suhu atau penurunan tumpuan kita boleh menggunakan persamaan kerja pada konstruksi batang (8. 9.). Gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ kita tempatkan pada tempat dan jurusan pergeseran yang dicari.

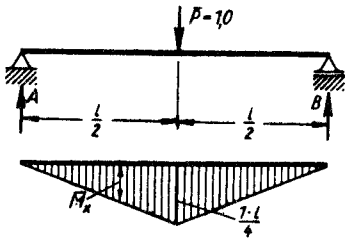
Contoh:

Beban yang sebenarnya dengan bidang momen M



Gambar 8. 2. 4. a

Beban virtual $\bar{P} = 1.0$ dengan bidang momen $\bar{M}$



Gambar 8. 2. 4. b.

oleh q: $M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$ oleh $\bar{P} = 1{,}0$: $\bar{M}_x = \frac{1}{2}x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right)$

Oleh karena batang pada contoh ini menjadi lurus dengan momen lembam I tetap kita boleh mengatakan, bahwa $ds = dx$ dan kemudian $I = I_c$ dan $I_c/I = 1$.

$$EI\delta = 2\int_0^{l/2}\left(\frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2\right)\frac{x}{2}\,dx$$

$$EI\delta = \frac{q}{2}\int_0^{l/2}\left(lx^2 - x^3\right)dx = \frac{q}{2}\left[l\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{l/2}$$

$$EI\delta = \frac{q}{2}\left(\frac{l^4}{24} - \frac{l^4}{64}\right) = \frac{5\,ql^4}{384} \qquad \text{dengan} \qquad \delta = \frac{5\,ql^4}{384\,EI}$$

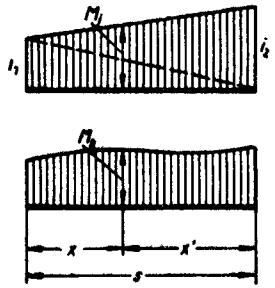
Hasil ini sudah kita ketahui dari bab 2. 8. (Perhitungan lendutan dan garis elastis) hanya penentuannya dengan cara ini lebih sulit. Akan tetapi hasil ini boleh kita ubah lagi seperti berikut:

$$EI\delta = \frac{5}{384}ql^4 = \frac{5}{12}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{4}l = cM\bar{M}l$$

Perhitungan $E.I.\delta$ pasti akan lebih sederhana lagi jikalau kita mengetahui nilai c. M dan $\overline{M}$ menjadi ukuran momen maximal yang sebenarnya dan oleh beban virtual $\overline{P} = 1.0$. c menentukan bentuk-bentuk dari tiap-tiap bidang (diagram) momen yang akan dikalikan.

Selanjutnya kita menentukan beberapa persamaan untuk kombinasi bentuk bidang momen masing-masing. Ordinat-ordinat bagi bidang momen kemudian ditentukan dengan i dan k dengan s sebagai panjangnya batang. Pada persamaan berikut kita lihat, bahwa $E.I.\delta_{ik}$ menjadi sama dengan integral $\int M_i\, M_k\, ds$ oleh bidang momen M_i dan M_k pada panjangnya batang s.

1. Trapesium — bidang sembarang:



$$M_i = i_1 \frac{x'}{s} + i_2 \frac{x}{s}$$

$$EI\delta_{ik} = \int_0^s M_i M_k dx = \frac{i_1}{s} \int_0^s M_k x' dx + \frac{i_2}{s} \int_0^s M_k x dx$$

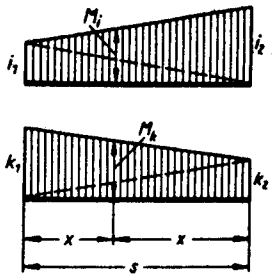
Gambar 8. 2. 4. c.

Integral pada rumus ini berarti momen pada bidang momen M_k dibandingkan pada ordinat sisi kanan (γ_r) dan ordinat sisi kiri (γ_l). Selanjutnya dapat kita katakan:

$$EI\delta_{ik} = \frac{1}{s}(i_1\gamma_r + i_2\gamma_l) \qquad (8.\ 12.)$$

2. Trapesium — trapesium:

Kejadian ini merupakan suatu kelanjutan dari kejadian ke 1.:



$$EI\delta_{ik} = \frac{i_1}{s}\left(\frac{1}{2}k_1 s \frac{2}{3}s + \frac{1}{2}k_2 s \frac{1}{3}s\right) + \frac{i_2}{s}\left(\frac{1}{2}k_1 s \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}k_2 s \frac{2}{3}s\right)$$

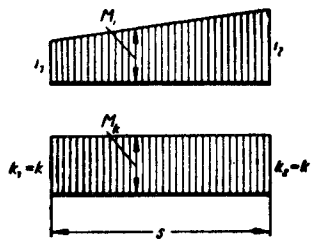
$$EI\delta_{ik} = \frac{s}{6}(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)$$

$$EI\delta_{ik} = \frac{s}{6}[i_1(2k_1 + k_2) + i_2(k_1 + 2k_2)] \qquad (8.\ 13.)$$

Gambar 8. 2. 4. d.

3. Trapesium — bidang segiempat:

Kejadian ini merupakan suatu kelanjutan dari kejadian ke 2 dengan $k_1 = k_2 = k$.



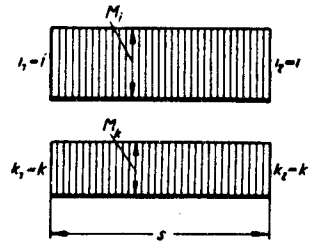
$$EI\delta_{ik} = \frac{s}{6}(i_1 3k + i_2 3k)$$

$$EI\delta_{ik} = \frac{1}{2}(i_1 + i_2)ks \qquad c = \frac{1}{2} \qquad (8.\ 14.)$$

Gambar 8. 2. 4. e.

4. Bidang segiempat — segiempat:

Kejadian ini merupakan suatu kelanjutan dari kejadian ke 3 dengan $i_1 = i_2 = i$.

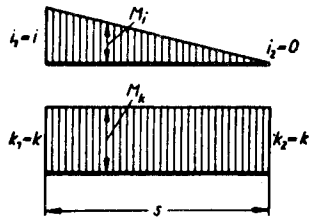


$$EI\delta_{ik} = iks \qquad c = 1 \qquad (8.15.)$$

Gambar 8. 2. 4. f.

5. Bidang segitiga — segiempat:

Kejadian ini merupakan suatu kelanjutan dari kejadian ke 3 dengan $i_1 = i$ dan $i_2 = 0$



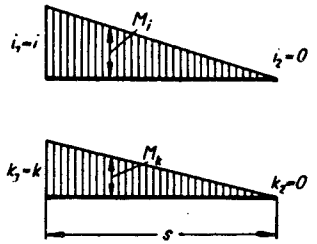
$$EI\delta_{ik} = \frac{1}{2}iks \qquad c = \frac{1}{2} \qquad (8.\ 16.)$$

Gambar 8. 2. 4. g.

FUMIGASI
T. A.
1997 / 1998

6. Bidang segitiga — segitiga searah:

Kejadian ini merupakan suatu kelanjutan dari kejadian ke2 dengan $i_1 = i$; $i_2 = 0$; $k_1 = k$ dan $k_2 = 0$



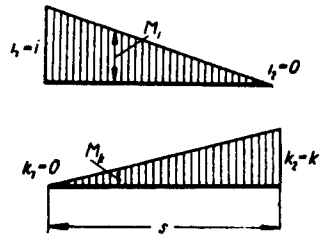
$$EI\delta_{ik} = \frac{s}{6}(i\,2k + 0)$$

$$\boxed{EI\delta_{ik} = \frac{1}{3}iks} \qquad c = \frac{1}{3} \qquad (8.17.)$$

Gambar 8. 2. 4. h.

7. Bidang segitiga — segitiga berlawanan:

Kejadian ini merupakan suatu kelanjutan dari kejadian ke2 dengan $i_1 = i$; $i_2 = 0$; $k_1 = 0$ dan $k_2 = k$



$$EI\delta_{ik} = \frac{s}{6}(ik + 0)$$

$$\boxed{EI\delta_{ik} = \frac{1}{6}iks} \qquad c = \frac{1}{6} \qquad (8.18.)$$

Gambar 8. 2. 4. i.

Pada semua kemungkinan yang lain bisa digunakan tabel-tabel I. 2. 14. (Tabel-tabel hasil pengintegralan pada kerja virtual) pada lampiran buku ini. Biasanya hanya dikerjakan dengan menggunakan tabel-tabel itu. Harus diperhatikan, bahwa tabel-tabel itu hanya boleh digunakan jikalau momen lembam I tetap. Contoh-contoh pada bab 8. 4. 1. (Pergeseran dan perputaran pada konstruksi batang) menerangkan penggunaan tabel-tabel itu.

8. 3. Syarat-syarat berikatan pada perubahan bentuk elastis

8. 3. 1. Syarat dari Betti

Betti menentukan pada tahun 1872 tentang ikatan pada perubahan bentuk elastis:

Kita perhatikan hasil kerja virtual dalam oleh suatu gaya normal N, gaya lintang Q dan momen M dengan gaya-gaya virtual oleh $\bar{P}$ yang menjadi $\bar{N}$; $\bar{Q}$ dan $\bar{M}$. Menurut rumus (8. 3.); (8. 4.) dan (8. 7.) kita boleh berkata:

$$A_i = \int \bar{N}\cdot N\cdot \frac{d_s}{EF} + \int \chi\cdot \bar{Q}\cdot Q\cdot \frac{d_s}{GF} + \int \bar{M}\cdot M\cdot \frac{d_s}{EI}$$

Pada rumus (8. 1.) dan (8. 2.) kita tentukan, bahwa giliran kumpulan gaya sebenarnya dan kumpulan gaya virtual boleh juga bolak-balik sehingga kita juga boleh berkata:

$$\bar{A}_i = \int N\cdot \bar{N}\cdot \frac{d_s}{EF} + \chi\int\cdot Q\cdot \bar{Q}\cdot \frac{d_s}{GF} + \int M\cdot \bar{M}\cdot \frac{d_s}{EI}$$

jikalau kita memperbandingkan rumus A_i dengan rumus $\bar{A}_i$ kita boleh menentukan, bahwa $A_i = \bar{A}_i$.

Kerja virtual luar pada $\bar{A}_i$ menjadi $\bar{A}_a = \Sigma P.\bar{\delta}$ (lihat juga rumus (8. 1.)) dan kerja luar pada A_i menjadi $A_a = \Sigma\bar{P}.\delta$ (lihat juga rumus (8. 2.)).

Dengan ini syarat *Betti* berbunyi:

> Jumlah kerja virtual oleh gaya $\bar{P}$ pada pergeseran δ oleh P menjadi sama dengan jumlah gaya P pada pergeseran $\bar{\delta}$ oleh gaya virtual $\bar{P}$.

$$\boxed{\Sigma\bar{P}\cdot\delta = \Sigma P\cdot\bar{\delta}} \qquad (8.19.)$$

Syarat ini juga boleh digunakan jikalau tidak ada gaya P dan gaya virtual $\bar{P}$, melainkan momen M dan momen virtual $\bar{M}$. Pergeseran δ dapat diganti dengan sudut putaran φ dan $\bar{\delta}$ dengan $\bar{\varphi}$.

8. 3. 2. Syarat dari Maxwell

Maxwell menentukan pada tahun 1864 tentang keterikatan pada perubahan bentuk elastis sesuatu yang sebetulnya menjadi suatu kelanjutan dari syarat dari *Betti*.

Jikalau kita menentukan, bahwa:

δ_{ko} menjadi pergeseran titik k pada jurusan gaya $P_k = 1.0$ oleh beban yang sebenarnya.

δ_{ki} menjadi pergeseran titik k pada jurusan gaya $P_k = 1.0$ oleh gaya $P_i = 1.0$ pada titik i.

δ_{ik} menjadi pergeseran titik i pada jurusan gaya $P_i = 1.0$ oleh gaya $P_k = 1.0$ pada titik k.

dsb.....

Selanjutnya bidang momen yang akan diintegralkan mendapat indizes yang sama seperti δ, maka misalnya:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i\,M_k}{EI}\,ds \qquad \text{atau} \qquad \delta_{ko} = \int \frac{M_k\,M_o}{EI}\,ds$$

Pada rumus ini bagian masing-masing berarti:

M_i = bidang momen oleh gaya $P = 1.0$ pada titik i
M_k = bidang momen oleh gaya $P = 1.0$ pada titik k
M_o = bidang momen oleh beban yang sebenarnya

Untuk menentukan δ_{ik} kita mencari bidang momen oleh gaya $P_k = 1.0$ dan oleh gaya virtual $\bar{P}_i = 1.0$. Selanjutnya diintegralkan.
Untuk menentukan misalnya δ_{ki} bidang momen yang harus kita cari sebetulnya sama jalannya seperti tadi (gaya $P_i = 1.0$ dan gaya virtual $\bar{P}_k = 1.0$)
Kemudian seharusnya hasil masing-masing menjadi sama, atau dengan kata-kata lain syarat dari *Maxwell* berbunyi:

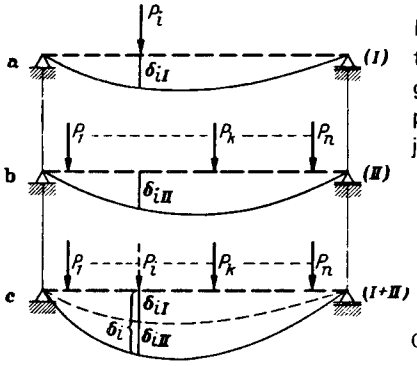
> Pergeseran suatu titik i oleh gaya $P = 1.0$ pada titik k menjadi sama dengan pergeseran titik k oleh gaya $P = 1.0$ pada titik i.

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \qquad (8.20)$$

Syarat ini boleh dilakukan pada konstruksi batang maupun konstruksi rangka batang.

8. 3. 3. Syarat dari Castigliano

Syarat yang ditentukan *Castigliano* pada tahun 1879 tentang perubahan bentuk elastis sebetulnya bisa berguna pada konstruksi batang dan konstruksi rangka batang tetapi syarat dari Castigliano jauh lebih rumit daripada sistim yang lain yang lebih mudah dan merupakan kelanjutan pada praktek.



Gambar 8. 3. 3. a. s/d c.

Pada suatu balok tunggal dengan gaya P_i kita tambahkan beban dengan suatu kumpulan gaya P_1 s/d P_n. Kita boleh mengsuper-posisikan dua beban ini untuk menerima jumlah kerja luar A_a.

Atau dengan bentuk lain A_a menjadi:

$$A_{a'} = A_I + A_{II} + A_{I\,II}.$$

Sebagai fungsi dari P_i kita tentukan:

$$A_I = \frac{1}{2} P_i \delta_{iI} = \frac{1}{2} \frac{P_i^2}{c} \qquad \text{(kerja pada jurusan pergeseran)}$$

dan $A_{I\,II} = P_i \delta_{i\,II}$ (kerja tidak pada jurusan pergeseran)

kemudian $A_a = \frac{1}{2} \frac{P_i^2}{c} + A_{II} + P_i \delta_{i\,II}$.

dengan memperhatikan, bahwa P_i tidak tergantung dari A_{II} boleh kita tentukan:

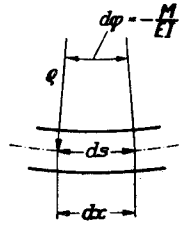
$$\frac{\partial A_a}{\partial P_i} = \frac{P_i}{c} + o + \delta_{i\,II} = \delta_{iI} + \delta_{i\,II} = \delta_i, \qquad (\partial = \text{derivasi})$$

dengan hasil yang menjadi syarat dari *Castigliano:*

$$\frac{\partial A_a}{\partial P_i} = -\frac{\partial A_i}{\partial P_i} = \delta_i. \qquad (8.21.)$$

8. 3. 4. Syarat dari Mohr

Syarat yang ditemukan *Mohr* pada tahun 1868 menentukan perubahan bentuk. Oleh karena mudah digunakan, syarat Mohr pada umumnya paling disukai. Penggunaannya terbatas pada balok tunggal.



Gambar 8. 3. 4. a.

Atas dasar lengkungan k pada suatu balok boleh kita tentukan:

$$k = \frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx y'' \qquad (8.22.)$$

Oleh karena itu kita selanjutnya boleh menentukan untuk suatu potongan balok yang melengkung menurut gambar 8. 3. 4. a.:

$$ds = \varrho d\varphi \approx dx$$

Persamaan pada garis elastis kemudian terbaca:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\varrho} = y'' = -\frac{M}{EI} \qquad (8.23.)$$

Selanjutnya kita menentukan hubungan-hubungan seperti berikut:

$$M = M_0 + \int Q dx,$$

$$\frac{dM}{dx} = Q = Q_0 - \int q\ dx,$$

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -q} \qquad (8.\ 24.)$$

Jikalau kita membandingkan persamaan (8. 23.) dan (8. 24.) kita bisa melihat, bahwa mereka berarti berkeluarga.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \text{dan} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q$$

Persamaan ini menjadi dasar syarat *Mohr* yang bisa selanjutnya digunakan secara grafis atau secara analitis seperti sudah diterangkan pada bab 2. 8. (Perhitungan lendutan dan garis elastis).

8. 3. 5. Ringkasan

1. Asas tentang kerja virtual menentukan: Jikalau suatu konstruksi batang atau rangka batang yang dibebani, ada dalam keadaan seimbang (termasuk reaksi pada tumpuan masing-masing) dan konstruksi ini menerima suatu pergeseran oleh suatu kumpulan gaya virtual, kita boleh mengatakan, bahwa jumlah kerja virtual oleh gaya itu menjadi nol.
Jikalau kita membalik urutan ini, kita mendapat asas tentang kerja virtual. Asas ini menjadi dasar untuk perhitungan perubahan bentuk.
2. Pergeseran pada suatu titik pada suatu konstruksi batang atau rangka batang dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan kerja dengan menggunakan satu gaya virtual $\bar{P}_k = 1.0$ atau satu momen $\bar{M}_k = 1.0$. Kerja virtual luar ini menjadi sama dengan kerja virtual dalam, dikurangi oleh pergeseran reaksi tumpuan yang biasanya menjadi nol.
3. Perhitungan kerja virtual dalam pada konstruksi batang bisa dilakukan pada umumnya dengan menggunakan tabel-tabel tentang hasil peng-integral-an di mana bentuk-bentuk dan kombinasi-kombinasi yang sering timbul sudah ditentukan sebagai nilai integral $\int W_i W_k ds$.

$\int W_i W_k ds$ menunjuk bahwa tabel-tabel tentang hasil peng-integral-an tidak hanya berlaku untuk bidang (diagram) momen, melainkan juga untuk bidang gaya normal dan gaya lintang, walaupun biasanya pengaruh pada gaya lintang dan gaya normal boleh dihapuskan.
Oleh karena itu pada umumnya pada tabel-tabel hasil peng-integral-an digunakan nilai integral $\int M_i M_k ds$.
Pada batang atau bagian batang yang diperhatikan seharusnya momen lembam I tetap. Jikalau tidak, kita boleh menggunakan suatu momen lembam dengan perbandingan I_c/I.
4. Pada konstruksi rangka batang persamaan kerja menjadi suatu jumlah, dan oleh karena itu penggunaannya tidak mengalami kesulitan.
5. Syarat dari Maxwell menentukan, bahwa pergeseran δ_{ik} suatu titik i oleh gaya $P = 1.0$ pada titik k menjadi sama dengan pergeseran δ_{ki} titik k oleh gaya $P = 1.0$ pada titik i.

8. 4. Contoh-contoh

8. 4. 1. Pergeseran dan perputaran pada konstruksi batang

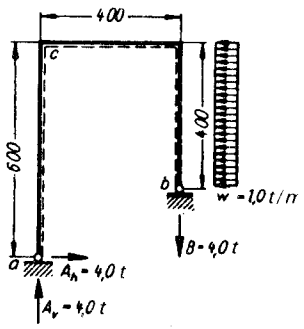
Dasar perhitungan adalah rumus (8. 8.) dan yang dipersingkat (8. 9.). Rumus (8. 8.) kita tambah dengan perbandingan momen lembam I_c dan tiap-tiap bagian dengan perbandingan luas batang F_c seperti berikut:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{1,0}\, EI_c\delta_k = {} & \int M\bar{M}\,\frac{I_c}{I}\,ds + \frac{I_c}{F_c}\int N\bar{N}\,\frac{F_c}{F}\,ds + \frac{EI_c}{GF_c}\int \varkappa Q\bar{Q}\,\frac{F_c}{F}\,ds \\ & + EI_c\left[\int \bar{N}\alpha_t t_s ds + \int \bar{M}\,\frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds - \Sigma \bar{C}c\right] \end{aligned}} \qquad (8.\ 25.)$$

Dengan rumus (8. 25.) ini kita bisa menentukan δ_k dengan memperhatikan segala pengaruh dan kemungkinan. Menurut keperluan, kita juga bisa menggunakan bagian masing-masing dari rumus (8. 25.) ini.
Dalam perhitungan kita perhatikan hal-hal sebagai berikut:

1. Menentukan sistim statis, gaya dan beban dengan diagram momen (M_o), gaya normal (N_o) dan gaya lintang (Q_o).
2. Menentukan momen lembam I (jikalau belum tentu kita memilih suatu momen lembam taksiran) atau menentukan perbandingan momen lembam pada masing-masing batang.
3. Jikalau perlu menentukan panjangnya batang s_c atau I_c dengan perbandingan momen lembam I_c seperti ditentukan pada syarat persamaan tiga momen (Clapeyron) $I_c = I \cdot I_c/I$.
4. Menentukan pergeseran dan perputaran yang akan dicari dan memasang gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ atau momen virtual $\bar{M} = 1.0$ pada tempatnya.
5. Menentukan diagram momen $\bar{M}$, dan jikalau perlu juga diagram gaya normal $\bar{N}$ dan gaya lintang $\bar{Q}$.
6. Memperhitungkan pergeseran atau perputaran dengan rumus (8. 25.) dan dengan bantuan tabel-tabel hasil pengintegralan pada kerja virtual pada lampiran I. 2. 14.

Contoh 1: Pada konstruksi portal dua ruas dengan momen lembam *I* tetap (lihat gambar berikut) dicari:



$I = 300'000\ \text{cm}^4$
$F = 200\ \text{cm}^2$
$E = 2'100\ \text{t/cm}^2$

Gambar 8. 4_1. a.

1. Pergeseran tumpuan *b* oleh beban angin $w = 1.0$ t/m dengan memperhatikan pengaruh momen lentur.
2. Pergeseran titik simpul (sudut) *c* oleh beban angin *w* dengan memperhatikan pengaruh momen lentur dan gaya normal.
3. Sudut perputaran garis elastis kaki *a-c* pada tumpuan *a* dengan perhatian pengaruh-pengaruh seperti pada titik 2.

Penyelesaian:
Menurut ketentuan untuk perhitungan titik 1 s/d 6 kita sudah mengetahui titik 1, sistim statis. Titik 2 dan 3 tidak perlu diperhatikan oleh karena momen lembam I sudah diketahui dan menjadi tetap. Akan tetapi kita harus menentukan diagram momen M_o dan diagram gaya normal N_o menurut ketentuan pada bab 7. (Konstruksi portal statis tidak tertentu) kita mendapat hasil berikut:

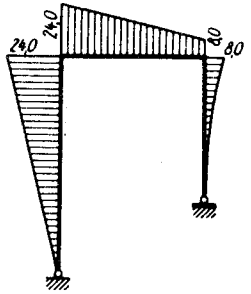


diagram *M*
(nilai dalam tm)

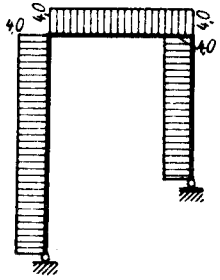


diagram *N*
(nilai dalam t)

Gambar 8. 4. 1 b.

Pertanyaan 1: Pada tempat dan jurusan δ_b kita menempatkan gaya virtual $P = 1.0$ dan menentukan diagram momen $\bar{M}$ berikut:

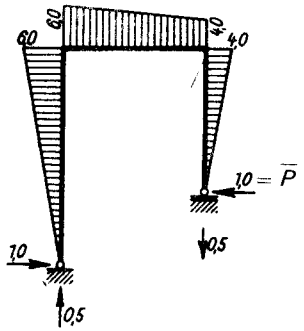


diagram $\bar{M}$
(nilai dalam t)

Gambar 8. 4. 1. c.

Momen-momen digambarkan pada sisi yang menerima gaya tarik. Penentuan tanda (+, −) sebetulnya tidak perlu, yang penting hanya penentuan ordinat masing-masing dan bentuk bidang (diagram) momen.
Selanjutnya kita dapat menghitung dengan urutan kaki kiri, batang horisontal, kaki kanan:

$$\bar{1},0\ EI\delta_{b0} = \frac{1}{3}24,0 \cdot 6,0 \cdot 6,0 + \frac{1}{6}4,0(2 \cdot 24,0 \cdot 6,0 + 24,0 \cdot 4,0 + 8,0 \cdot 6,0 + 2 \cdot 8,0 \cdot 4,0) + \frac{1}{4}8,0 \cdot 4,0 \cdot 4,0$$

$$\bar{1},0\ EI\delta_{b0} = 650,67\ \text{t}^2\text{m}^3$$

$$EI\delta_{b0} = 650,67\ \text{tm}^3$$

$$\delta_{b0} = \frac{650,67}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 3,0 \cdot 10^{-3}} = 0,0103\ \text{m}$$

$$\delta_b = \mathbf{1,03\ cm}$$

Pada perhitungan ini pada kaki kiri kita mengintegralkan segitiga-segitiga, pada batang horisontal trapesium-trapesium, dan pada kaki kanan parabol — segitiga.

> Jikalau dua bidang (diagram) momen berada pada sisi batang yang sama, hasil pengintegralan menjadi positif (+), jikalau tidak hasilnya menjadi negatif (−).

Jikalau hasil pengintegralan menjadi positif (+), maka jurusan gaya virtual *P* menjadi sama dengan jurusan δ.
Pada pertanyaan 2: Pada tempat dan jurusan δ_c kita menempatkan gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ dan menentukan diagram momen dan diagram gaya normal

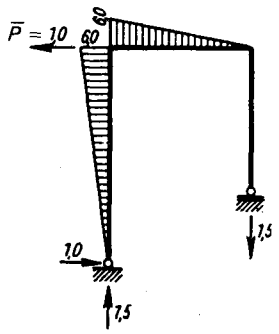


diagram $\bar{M}$

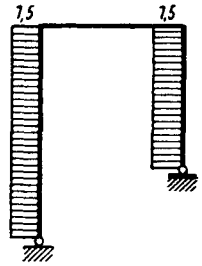


diagram $\bar{N}$

Gambar 8. 4. 1. d.

Kita menentukan pergeseran δ_c oleh tiap-tiap akibat tersendiri:
a) pengaruh oleh momen lentur (lihat gambar 8. 4. 1. b. dan d.):

$$EI\delta_{cM} = \frac{1}{3}\,24{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot 6{,}0 + \frac{1}{6}\,4{,}0 \cdot 6{,}0(2 \cdot 24{,}0 + 8{,}0) + 0$$

$$EI\delta_{cM} = 288 + 224 = 512\ \text{tm}^3$$

$$\delta_{cM} = \frac{512}{2{,}1 \cdot 10^7 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-3}} = 0{,}00814\ \text{m}$$

$$\delta_{cM} = \mathbf{0{,}814\ cm}$$

b) pengaruh oleh gaya normal (lihat gambar 8. 4. 1. b. dan d.):

$$EF\delta_{cN} = 1{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 1{,}5 \cdot 6{,}0 \cdot = 0 = 1{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 1{,}5 \cdot 4{,}0$$

$$EF\delta_{cN} = 36{,}0 + 24{,}0 = 60{,}0\ \text{tm}$$

$$\delta_{cN} = \frac{60{,}0}{2{,}1 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 0{,}00014\ \text{m}$$

$$\delta_{cN} = \mathbf{0{,}014\ cm}$$

c) pergeseran δ_c diterima oleh superposisi:

$$\delta_{c0} = \delta_{cM} + \delta_{cN} = 0{,}814 + 0{,}014 = \mathbf{0{,}828\ cm}$$

Dengan hasil ini kita sudah membuktikan, bahwa pengaruh pada pergeseran oleh gaya normal biasanya begitu kecil maka kita boleh mengabaikan perhitungan.
Pada pertanyaan 3: Pada tempat dan jurusan φ_a kita tempatkan momen virtual $\bar{M}$ = 1.0 tm dan kita tentukan diagram momen dan diagram gaya normal

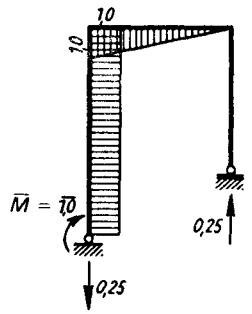


diagram $\bar{M}$

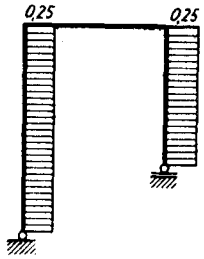


diagram $\bar{N}$

Gambar 8. 4. 1. e.

kita menentukan perputaran φ_a oleh tiap-tiap akibat tersendiri:
a) pengaruh oleh momen lentur (lihat gambar 8. 4. 1. b. dan e.):

$$EI\varphi_{aM} = -\frac{1}{2}\,24{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 6{,}0 - \frac{1}{6} \cdot 4{,}0 \cdot 1{,}0(2 \cdot 24{,}0 + 8{,}0) + 0$$

$$EI\varphi_{aM} = -72{,}0 - 37{,}3 = -109{,}3\ \text{tm}$$

$$\varphi_{aM} = \frac{-109{,}3}{2{,}1 \cdot 10^7 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-3}} = -0{,}00174$$

b) pengaruh oleh gaya normal (lihat gambar 8. 4. 1. b. dan e.):

$$EF\varphi_{aN} = -1{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 0{,}25 \cdot 6{,}0 - 1{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 0{,}25 \cdot 4{,}0 = -10{,}0\ \text{t}$$

$$\varphi_{aN} = \frac{-10{,}0}{2{,}1 \cdot 10^7 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}} = -0{,}00002$$

c) perputaran φs_a diterima oleh superposisi:

$$\varphi_{a0} = -0{,}00174 - 0{,}00002 = -0{,}00176$$

$$\varphi_{a0} = -0{,}00176\,\frac{180^\circ}{\pi} \approx -0{,}1^\circ$$

Tanda negatif (−) menunjukkan, bahwa perputaran φ_a berlaku terhadap jurusan momen virtual $\bar{M}$. Dengan hasil ini kita juga membuktikan, bahwa pengaruh pada perputaran oleh gaya normal biasanya begitu kecil, sehingga kita boleh mengabaikan perhitungan.

Contoh 2: Pada rusuk 'Gerber' berikutnya dicari lendutan di tengah bagian balok yang tergantung antara engsel dan tumpuan *C*. Beban merata sebesar q = 1.0 t/m; modul elastis E = 2'100 t/cm² dan $I_{AB} = I_{BC}$ = 9'800 cm⁴.

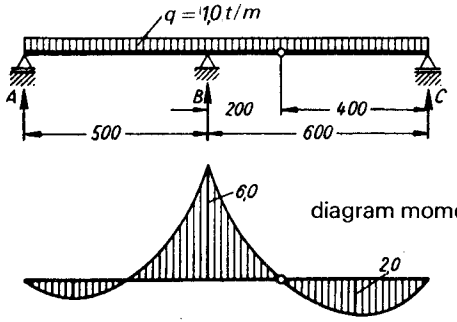


diagram momen M_o

Gambar 8. 4. 1. f.

Penyelesaian:

Diagram momen M_o sudah ditentukan pada gambar 8. 4. 1. f. Oleh karena dengan menggunakan tabel-tabel hasil pengintegralan kita dengan bidang momen M_o ini tidak dapat ditemukan, kita akan membagi diagram momen pada empat bebanan dasar, yaitu: momen pada bagian balok yang tergantung, gaya pada engsel, momen pada konsole dan momen pada balok $A-B$ seperti berikut:

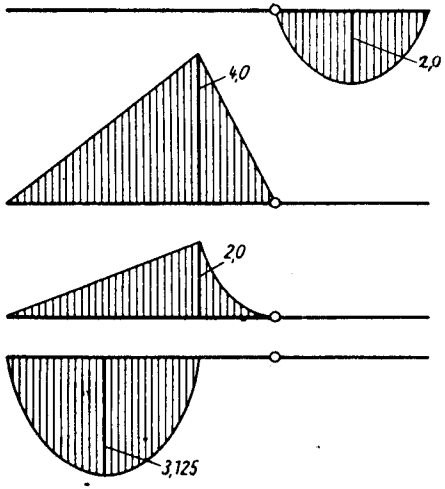


diagram momen oleh beban merata pada bagian balok yang tergantung

diagram momen oleh gaya yang timbul pada engsel

diagram momen oleh beban merata pada bagian konsole

diagram momen oleh beban merata pada bagian $A-B$

Gambar 8. 4. 1. g.

Untuk menentukan lendutan maksimal pada tengah-tengah bagian balok yang tergantung, kita memasang satu gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ pada tempat dan jurusan lendutan yang dicari, dan menentukan diagram momen $\bar{M}$ menurut gambar berikut:

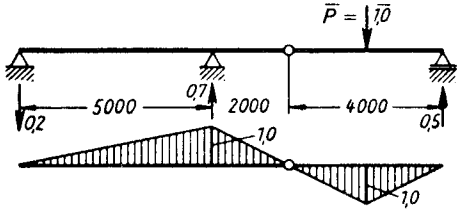


diagram momen $\bar{M}$

Gambar 8. 4. 1. h.

Selanjutnya kita dapat menghitung (dalam urutan; bagian balok $A-B$ — konsole — bagian balok tergantung):

$$EI\delta_{m0} = 0 + \frac{1}{3}4{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 5{,}0 + \frac{1}{3}2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 5{,}0 - \frac{1}{3}3{,}125 \cdot 1{,}0 \cdot 5{,}0 + 0 +$$

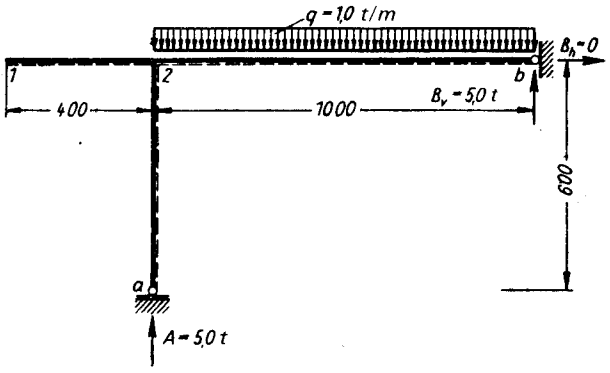
$$\frac{1}{3}4{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 2{,}0 + \frac{1}{4}2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 2{,}0 + 0 + \frac{1}{3}2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot \frac{5}{4} + 0 + 0 + 0$$

$$EI\delta_{m0} = 11{,}78 \text{ tm}^3$$

$$\delta_{m0} = \frac{11{,}78 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 10^3} = \mathbf{0{,}572 \text{ cm}}$$

Contoh 2 ini menerangkan, bahwa pada diagram (bidang) momen agak rumit kita boleh membagi diagram momen itu ke dalam beberapa diagram momen yang agak sederhana supaya kita bisa menggunakan tabel-tabel hasil pengintegralan pada kerja virtual (I. 2. 14.).

Contoh 3: Pada konstruksi portal berikut dengan $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{grd}}$; $I = 150'000 \text{ cm}^4$; $h = 70$ cm dan $E = 2'100 \text{ t/cm}^2$ menurut gambar 8. 4. 1. i.



Gambar 8. 4. 1. i.

Dicari:

1. Pergeseran vertikal pada titik 1 oleh beban merata $q = 1.0$ t/m pada batang 2-b.
2. Pergeseran vertikal pada titik 1 oleh suhu yang berbeda pada sisi atas dan sisi bawah pada batang 1—2 dan 2-b oleh $\Delta t = 20°$.

Penyelesaian:

Penentuan bidang (diagram) momen oleh beban merata dan oleh gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ t pada titik 1 seperti berikut:

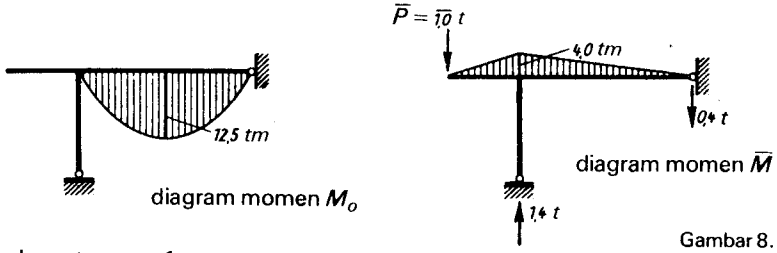


diagram momen M_o diagram momen $\bar{M}$

Gambar 8. 4. 1. k.

Pada pertanyaan 1:

$$EI\delta_{10} = -\frac{1}{3}12{,}5 \cdot 4{,}0 \cdot 10{,}0 = -166{,}7\ \text{tm}^3$$

$$\delta_{10} = \frac{-166{,}7 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^3} = \mathbf{-0{,}53\ cm}$$

Pada pertanyaan 2: Atas dasar rumus (8. 8.) dan rumus (8. 25.) kita dapat menentukan pergeseran oleh perbedaan suhu seperti berikut:

$$\delta_t = \int \bar{M}\frac{\alpha_t \Delta t}{h}ds = \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\int \bar{M}\,ds$$

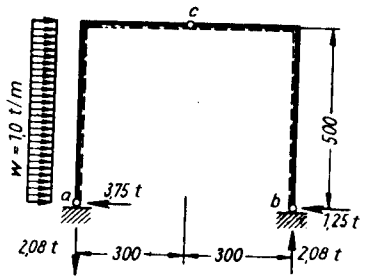
Integral ini menentukan bidang momen $\bar{M}$ oleh gaya virtual $\bar{P}$.

$$\delta_{1t} = \frac{12.10^{-6} \cdot 20}{0{,}7}\frac{1}{2}4{,}0\,(10{,}0 + 4{,}0) = 0{,}0096\ \text{m}$$

$$\underline{\delta_{1t} = 0{,}96\ \text{cm}}$$

Hasil integral $\int M\frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds$ menjadi positif (+) jikalau pembengkokan garis sumbu oleh perbedaan suhu berjurusan sama dengan beban virtual $\bar{P}$ yang dipilih sembarang, dan bagian konstruksi batang yang lebih panas adalah juga pada sisi yang menerima beban virtual.

Contoh 4: Pada konstruksi portal tiga ruas menurut gambar berikut dengan S sebagai tiang (batang) yang vertikal dan R sebagai batang yang horisontal dengan nilai-nilai berikut $I_R = 100'000\ \text{cm}^4$; $I_s = 120'000\ \text{cm}^4$; $E = 2'100\ \text{t/m}^2$; $h_R = 50$ cm; $h_s = 60$ cm dan $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6}/\text{grd}$.



Gambar 8. 4. 1. l.

dicari:

1. Pergeseran vertikal pada engsel c oleh beban angin w.
2. Pergeseran vertikal pada engsel c oleh perubahan suhu pada sisi atas batang horisontal dengan $t_1 = 40°$ dan pada sisi bawah $t_2 = 10°$.
3. Perputaran garis sumbu pada tumpuan b oleh perubahan suhu seperti diterangkan pada titik 2.

Penyelesaian:

Penentuan bidang momen oleh beban angin w pada batang (kaki) kiri:

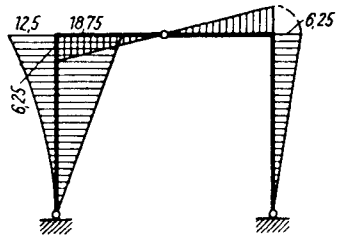


diagram M (tm)

Gambar 8. 4. 1. m.

Untuk telitinya pengertian kita menggambar pada batang vertikal sebelah kiri diagram momen oleh beban angin w, dan diagram momen oleh reaksi tumpuan a yang horisontal sebelah kanan. Selanjutnya kita tentukan momen lembam perbandingan seperti berikut:

$$I_c = I_s \qquad I'_R = I_R\frac{I_c}{I_R} = 6{,}0\ \frac{1{,}2 \cdot 10^5}{10^5} = 7{,}2\ \text{m}$$

$$I'_s = I_s\frac{I_c}{I_s} = 5{,}0\ \text{m}$$

Pada pertanyaan 1: Pada tempat dan jurusan δ_c kita menempatkan gaya virtual $\bar{P} = 1.0$ dan menentukan diagram momen, dan untuk penyelesaian pertanyaan 2 juga langsung diagram gaya normal.

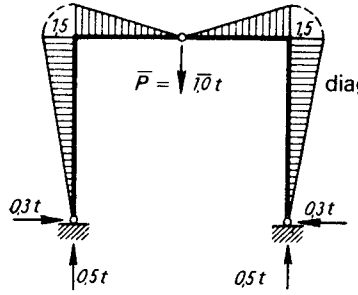


diagram momen $\bar{M}$

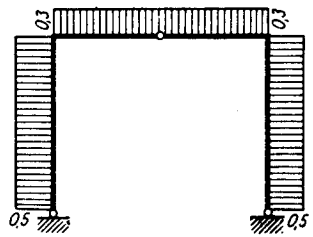


diagram gaya normal $\bar{N}$ (= t)

Gambar 8. 4. 1. n.

Selanjutnya hasil pengintegralan menjadi:

$$EI_c\delta_{c0} = \frac{1}{4}\ 12{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 5{,}0 - \frac{1}{3}\ 18{,}75 \cdot 1{,}5 \cdot 5{,}0 + \frac{1}{3}\ 6{,}25 \cdot 1{,}5 \cdot 5{,}0$$

$$EI_c\delta_{c0} = 23{,}4 - 46{,}9 + 15{,}6 = -7{,}9\ \text{tm}^3$$

$$\delta_{c0} = \frac{-7{,}9 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5} = \mathbf{-0{,}0314\ cm}$$

Oleh karena hasil menjadi negatif (−) maka kita ketahui, bahwa jurusan δ_{co} terhadap jurusan gaya virtual $\bar{P}$, atau dengan kata lain, berjurusan dari bawah ke atas.
Pada pertanyaan 2: Perubahan suhu itu kita bagi atas: a) Perubahan suhu seragam $t_s = 10°$ dan b) Perbedaan suhu pada sisi atas dan sisi bawah batang sebesar $\triangle t = 30°$.
Menurut rumus (8. 25.) kita dapat menentukan:

$$\delta_t = \int \bar{N}\alpha_t t_s ds + \int \bar{M}\frac{\alpha_t \triangle t}{h} ds$$

Oleh karena perubahan suhu ini hanya dialami batang yang horisontal (R) kita dapat menentukan bagi t_s dan $\triangle t$ masing-masing δ_{cts} dan $\delta_{c\triangle t}$ berikut:

$$\delta_{cts} = \alpha_t t_s \int \bar{N} ds \quad \text{dan} \quad \delta_{c\triangle t} = \frac{\alpha_t \triangle t}{h} \int \bar{M} ds$$

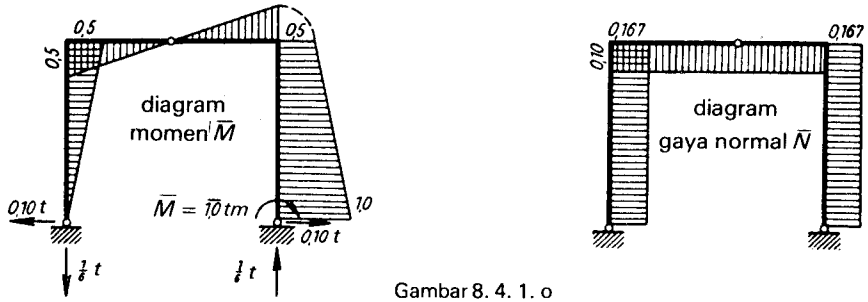
Integral ini menentukan diagram (bidang) momen $\bar{M}$ dan diagram gaya normal $\bar{N}$ oleh gaya virtual $\bar{P}$ (lihat juga gambar 8. 4. 1. n.).

$$\delta_{cts} = -12 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 0{,}3 \cdot 600 = -0{,}02\ \text{cm}$$

$$\delta_{c\triangle t} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 30}{60}\ 2\frac{1}{2}\ 150 \cdot 300 = +0{,}27\ \text{cm}$$

$$\delta_c t = -0{,}02 + 0{,}27 = \mathbf{+0{,}25\ cm}$$

Pada pertanyaan 3: Pada tempat dan putaran φ_b kita memasang suatu momen virtual $\bar{M} = 1.0$ dan menentukan bidang (diagram) momen dan diagram gaya normal:



Gambar 8. 4. 1. o

Oleh karena bidang momen pada batang yang horisontal sebelah kiri dan kanan dari engsel menjadi sama besarnya dengan tanda (+, −) berlawanan, maka jumlah bidang momen itu menjadi nol. Selanjutnya kita hanya perlu memperhatikan diagram gaya normal untuk menentukan φ_{bt}.

$$\varphi_{bt} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 0{,}10 \cdot 600 = 0{,}0072$$

$$\varphi_{bt}° = \mathbf{0{,}13°}$$

8. 4. 2. Pergeseran pada konstruksi rangka batang

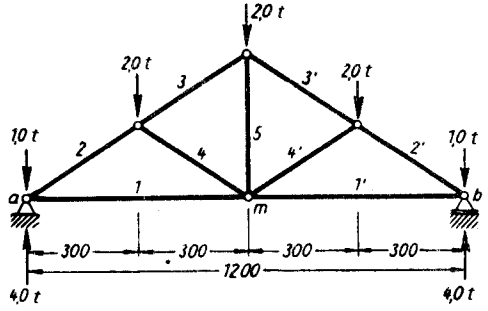
Dasarnya pada perhitungan adalah rumus (8. 10.) dan rumus (8. 11.). Untuk mencari hasilnya kita bekerja setapak demi setapak seperti berikut:

1. Penentuan panjangnya s dan luas batang F bagi tiap-tiap batang. Pengurangan luas batang oleh lobang baut atau alat sambungan lain tidak usah diperhatikan.
2. Penentuan gaya batang masing-masing oleh beban sebenarnya dengan menggunakan cara Cremona atau Cullman-Ritter.
3. Penentuan gaya batang $\bar{S}$ masing-masing oleh beban virtual $\bar{P} = 1.0$ dengan cara grafis (Cremona) atau analitis (Cullmann-Ritter).
4. Mencari hasil dengan menggunakan persamaan kerja pada konstruksi rangka batang. Perhitungan oleh beban atau perubahan suhu lebih baik dilaksanakan masing-masing tersendiri.
5. Menjumlahkan hasil pada semua batang pada konstruksi rangka batang.

Perhitungan ini pada umumnya dilaksanakan dengan beban dalam t dan ukuran dalam cm sebagai tabel seperti terlihat pada contoh-contoh berikut. Pada prakteknya persamaan kerja pada konstruksi rangka batang digunakan dalam bentuk berikut:

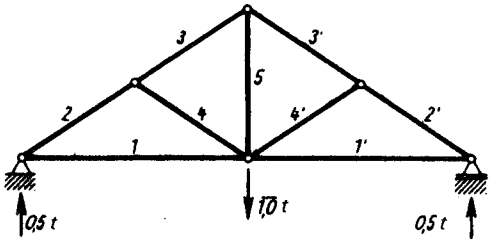
$$\boxed{E\delta_K = \Sigma S \bar{S} \frac{s}{F}} \qquad (8.\ 26.)$$

Contoh 1: Pada konstruksi rangka batang berikutnya dicari pergeseran pada titik simpul m. Ukuran masing-masing batang terlihat pada tabel berikut, E = 100'000 kg/cm²:



Gambar 8.4.2.a.

Penyelesaian:
Pada titik simpul dan jurusan δ_m kita tempatkan suatu gaya virtual $P = 1{,}0$ seperti terlihat pada gambar 8. 4. 2. b. berikut.



Gambar 8. 6. 4. b.

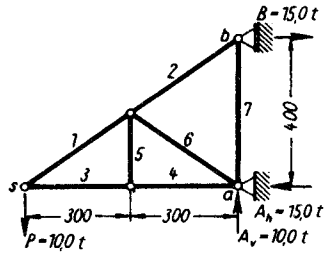
Dengan mengunakan sistim Cremona atau Cullmann-Ritter kita menentukan gaya batang S oleh beban sebenarnya dan gaya batang $\overline{S}$ oleh beban virtual, dan mengisi hasilnya pada tabel berikut.
Perlu diperhatikan, bahwa pada jumlahan batang 1 s/d 4 bersifat ganda (kiri dan kanan) maka batang 5 hanya timbul satu kali.

batang	s	F	s/F	S	S	$S\,S\,s/F$
Dim.	[cm]	[cm²]	[1/cm]	(t)	(t)	(t/cm)
1	600	100	6,00	+ 4,5	+ 0,75	20,25
2.	360	160	2,25	− 5,4	− 0,90	10,92
3	360	160	2,25	− 3,6	− 0,90	7,28
4	360	120	3,00	− 1,8	− 0	0,00
$\Sigma 1....7$						38,45
$2\Sigma 1....4$						76,90
5	400	100	4,00	+ 2,0	+ 1,0	8,00
$E\delta_{\mu 0}$						84,90

$$\delta_{m0} = \frac{84{,}9}{100} = \mathbf{0{,}85\ cm}$$

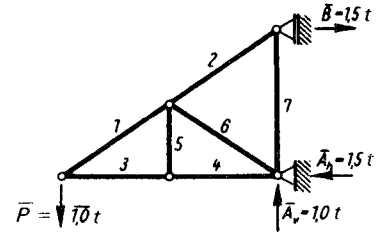
Oleh karena tiap batang yang tidak punya gaya batang (batang nol) tidak ikut dalam perhitungan, kita bisa memudahkan perhitungan dengan menentukan pertama semua batang nol.

Contoh 2: Pada konstruksi rangka batang berikutnya dicari penurunan titik simpul s dengan $E = 2'100$ t/cm², $\alpha_t = 12.10^{-6}$ grd^{-1}, $F_1 = F_2 = 24.6$ cm², $F_3 = F_4 = 38.4$ cm², $F_7 = 13.8$ cm², oleh:
1. Gaya $P = 10$ t pada titik simpul s
2. Perubahan suhu $t_s = 20°$ pada batang 1 dan 2
3. Pergeseran tumpuan a sebesar $c_a = 1.0$ cm ke kanan



Gambar 8. 4. 2. c.

Penyelesaian:
Pada titik simpul s dan jurusan δ_s kita tempatkan suatu gaya virtual $\overline{P} = 1.0$ seperti terlihat pada gambar 8. 4. 2. d. berikut.
Pada beban ini batang 5 dan 6 menjadi batang nol, dan $\overline{S}_1 = \overline{S}_2$ *dan* $\overline{S}_3 = \overline{S}_4$:



Gambar 8. 4. 2. d.

Pada pertanyaan 1: kita gunakan tabel seperti berikut:

batang	s	F	s/F	S	$\overline{S}$	$S\,\overline{S}\,s/F$
	[cm]	[cm²]	[1/cm]	(t)	(t)	(t/cm)
1,2	720	24,6	29,3	+ 18,0	+ 1,8	950
3,4	600	38,4	15,6	− 15,0	− 1,5	351
7	400	13,8	29,0	− 10,0	− 1,0	290
$\Sigma....7$						1591

$$\delta_{s0} = \frac{1591}{2100} = \mathbf{0{,}76\ cm}$$

Pada pertanyaan 2: Perubahan suhu hanya dialami batang 1 dan 2, dan oleh karena itu persamaan kerja pada konstruksi rangka batang hanya perlu pada dua batang itu. Oleh karena batang 1 dan 2 mempunyai beban S yang sama, perhitungan δ_{st} kemudian menjadi:

$\delta_{st} = S\alpha_t t_s s = 1{,}8 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 720 = \mathbf{0{,}31\ cm}$

Pada pertanyaan 3: Pergeseran c_a pada tumpuan a berjurusan ke kanan. Oleh karena reaksi tumpuan $\overline{A}_h$ oleh beban virtual $\overline{P} = 1.0$ berjurusan ke kiri, kerja virtual menjadi negatif (−):

$\overline{A}_h = 1{,}5$ t $\qquad c_a = 1{,}0$ cm

$\overline{C}_c = -1{,}5 \cdot 1{,}0 = -1{,}5$ tcm

$\overline{1{,}0}\,\delta_s = -\Sigma\,\overline{C}c \qquad \delta_s = +\,\mathbf{1{,}5\ cm}$

8. 5. Garis elastis pada konstruksi batang

8. 5. 1. Pengetahuan dasar

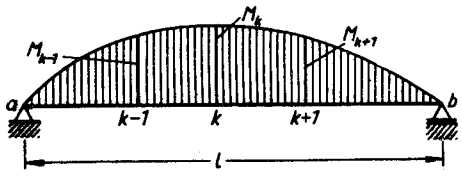
Seperti telah dikatakan pada bab 2. 8. (Perhitungan lendutan dan garis elastis) pada bab ini tidak dikemukakan pengetahuan baru, melainkan bersifat memperdalam pengetahuan yang sudah-sudah.
Sebagai peringatan kita selanjutnya mengatasi setindak demi setindak penentuan garis elastis menurut syarat *Mohr* (lihat bab 2. 8. 2. dan 8. 3. 4.):

1. Penentuan reaksi tumpuan dan diagram momen oleh beban sebenarnya.
2. Pembebanan konstruksi batang pada titik 1. dengan diagram (bidang) momen itu yang dinegatifkan (−).
3. Perhatikan perubahan momen lembam dengan mempereduksikan diagram momen yang sepadangnya.
4. Pemotongan diagram momen itu ke dalam bagian-bagian. Garis batas diagram momen yang lengkung dengan begitu dapat diluruskan pada bagian masing-masing. Penentuan titik berat pada bagian masing-masing.
5. Pembebanan konstruksi batang dengan gaya-gaya yang menjadi resultante-resultante pada bagian masing-masing diagram momen.
6. Penentuan reaksi tumpuan oleh bebanan titik 5. itu. Reaksi tumpuan ini menjadi sudut putar tumpuan (α,β) dikalikan dengan *E.I.*
7. Penentuan diagram (bidang) momen oleh bebanan titik 5. itu. Garis batas diagram momen sekarang menjadi garis elastis dikalikan dengan *E.I.*
8. Penentuan momen maximal oleh bebanan titik 5. itu, pada tempat dengan gaya lintangnya menjadi nol. Momen maksimal itu menjadi lendutan maksimal dikalikan dengn *E.I.*

Penentuan garis elastis menurut syarat *Mohr* ini tidak menjadi sulit. Oleh karena penentuan secara analitis memerlukan banyak waktu, biasanya digunakan cara grafis.
Yang menjadi paling sulit pada perhitungan itu, yalah penentuan titik berat dari bagian masing-masing dari bidang momen.
Selanjutnya kita menentukan suatu persamaan yang memungkinkan perhitungan tsb. tanpa menentukan titik berat masing-masing bagian bidang momen dahulu. Dengan menggunakan persamaan yang baru ini, kita bisa memudahkan titik 3 s/d 5 pada perhitungan garis elastis menurut syarat *Mohr*.

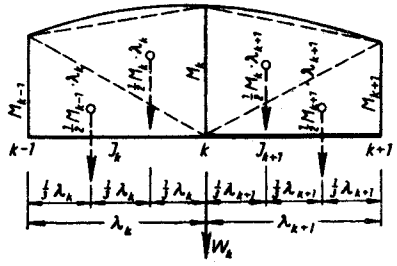
8. 5. 2. Penentuan bobot-beban *W*

Kita memperhatikan suatu balok tunggal yang dibebani oleh suatu diagram (bidang) momen seperti berikut:



Gambar 8. 5. 2. a.

Suatu potongan sembarang, kita tentukan dengan *k*, potongan di samping kiri dengan $k-1$ dan yang di samping kanan dengan $k+1$. Jarak $k-1$ s/d *k* kita tentukan dengan λ_k dan jarak *k* s/d $k+1$ dengan λ_{k+1} dsb. Ukuran atau jarak bagian-bagian diagram momen ini menjadi sembarang. Akan tetapi seharusnya momen lembam *I* menjadi tetap pada satu bagian.
Ukuran dan luas pada bagian-bagian bidang momen ditentukan begitu, maka gaya sebagai resultante bagian bidang momen tidak bekerja pada balok tunggal pada titik beratnya, melainkan pada tempat potongan, misalnya *k*, $k+1$ dsb.



Gambar 8. 5. 2. b.

Gaya-gaya ini ditentukan dengan $E \cdot I_c \cdot W_k$. Nilainya ditentukan sebagai reaksi tumpuan pada dua balok tunggal dengan lebar bentang λ_k dan λ_{k+1}. Dengan gaya-gaya $E \cdot I_c \cdot W_k$ ini kita membatasi lagi balok tunggal dari gambar 8. 5. 2. a. dan mendapatkan garis elastis sebagai diagram momennya. Namanya bobot-beban *W*.
Perhitungan $E \cdot I_c \cdot W_k$ dilakukan dengan meratakan bagian bidang momen yang sebenarnya melengkung. Kita mendapatkan trapesium yang bisa dibagi dalam dua segitiga. Nilasi W_k ditentukan seperti berikut:

$$EI_c\, W_k = \frac{1}{2} M_{k-1} \lambda_k \frac{I_c}{I_k} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} M_k \lambda_k \frac{I_c}{I_k} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} M_k \lambda_{k+1} \frac{I_c}{I_{k+1}} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} M_{k+1} \lambda_{k+1} \frac{I_c}{I_{k+1}} \frac{1}{3}$$

$$\boxed{EI_c.W_k = \frac{1}{6}\left[(M_{k-1} + 2M_k)\,\lambda'_k + (2M_k + M_{k+1})\,\lambda'_{k+1}\right]} \qquad (8.27.)$$

dengan penentuan, bahwa:

$$\lambda'_k = \lambda_k \frac{I_c}{I_k} \quad \text{dan} \quad \lambda'_{k+1} = \lambda'_{k+1} \frac{I_c}{I_{k+1}}$$

Pada tumpuan sebelah kiri dapat kita katakan, bahwa $k = 0$ dan $\lambda_k = 0$ dan karena itu $\lambda_{k+1} = \lambda_1$. Bobot-beban W_0 menjadi pada titik itu:

$$EI_c\, W_0 = \frac{\lambda_1'}{6}\,(2\,M_0 + M_1) \qquad (8.\,28.)$$

Sebaliknya pada tumpuan sebelah kanan kita tentukan $k = n$; $\lambda_{k+1} = o$ dan $\lambda_k = \lambda_n$ dengan bobot-beban W_n:

$$EI_c\, W_n = \frac{\lambda_n'}{6}\,(M_{n-1} + 2\,M_n) \qquad (8.\,29.)$$

Jikalau misalnya semua bagian dari suatu bidang momen sama lebarnya dan momen lembam I dari balok tunggal menjadi tetap kita bisa menyederhanakan rumus (8. 27.) seperti berikut:

$$EIW_k = \frac{\lambda}{6}\,(M_{k-1} + 4\,M_k + M_{k+1}) \qquad (8.\,30.)$$

Selanjutnya pada tumpuan kiri bobot-beban W_0 menjadi:

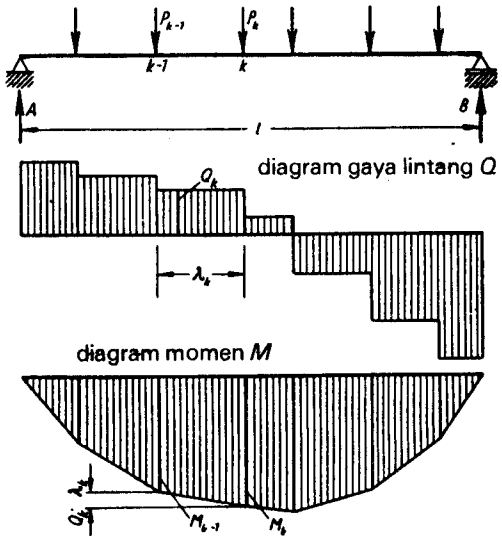
$$EIW_0 = \frac{\lambda}{6}\,(2\,M_0 + M_1) \qquad (8.\,31.)$$

dan kemudian pada tumpuan kanan bobot-beban W_n menjadi:

$$EIW_n = \frac{\lambda}{6}\,(M_{n-1} + 2\,M_n) \qquad (8.\,32.)$$

8. 5. 3. Penentuan garis elastis dengan bobot-beban W pada konstruksi batang

Pada bab 8. 5. 2. tadi kita tentukan persamaan yang membantu kita pada perhitungan pembebanan oleh diagram momen dengan gaya-gaya yang dikalikan dengan *E.I.* Pada bab ini kita mencari jalan untuk menentukan garis elastis dengan cara yang paling mudah. Kita ingat konstruksi diagram gaya lintang dan diagram momen, dengan ketentuan seperti berikut:



$$Q_k = Q_{k\text{-}i} - P_{k\text{-}i}$$

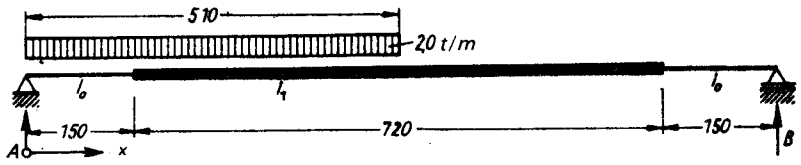
$$M_k = M_{k\text{-}i} + Q_k\lambda_k$$

Gambar 8. 5. 3. a.

Persamaan kedua tentang diagram momen bisa kita tentukan juga dengn kata-kata berikut:

> Momen lentur M_k pada suatu titik sembarang k pada suatu balok tunggal menjadi sama dengan momen lentur M_{k-1} pada titik k-1 sebelah kiri, ditambah dengan hasil kali gaya lintang Q_k antara titik k dan titik $k-1$ dengan jarak λ_k.

Contoh 1: Pada balok tunggal $A-B$ berikut dicari garis elastis dengan menggunakan bobot-beban W. $I_0 = 24'000\ \text{cm}^4$; $I_1 = 44{,}300\ \text{cm}^4$ dan $E = 2'100\ \text{t/cm}^2$.

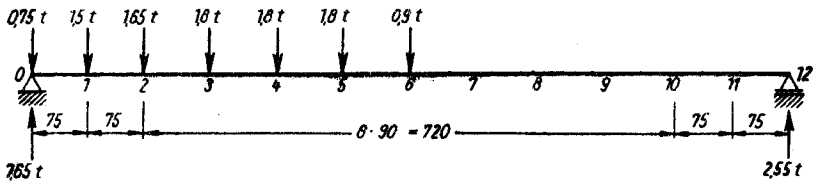


Gambar 8. 5. 3. b.

Penyelesaian:
Beban merata dibagi sembarang seperti misalnya pada gambar berikut 8. 5. 3. c., dan reaksi tumpuan R_A dan R_B dapat ditentukan sebagai:

$$R_A = \frac{1}{10,20} 2,00 \cdot 5,10 \cdot 7,65 = 7,65\,\text{t}$$

$$R_B = \frac{1}{10,20} 2,0 \cdot 5,10 \cdot 2,55 = 2,55\,\text{t}$$



Gambar 8. 5. 3. c.

Sebagai perbandingan momen lemban kita memilih I_1 oleh karena I_1 sudah berada pada bagian besar pada balok tunggal ini. Selanjutnya ditentukan:

$$I_c = I_1 \qquad \frac{I_c}{I_1} = 1 \qquad \frac{I_c}{I_0} = \frac{44300}{24000} = 1,845$$

Pada perhitungan ini kita menggunakan suatu tabel seperti berikut. Baris 1 s/d 6 berisikan data-data dari beban yang sebenarnya, baris 7 s/d 11 berisikan data-data untuk penentuan bobot-beban W, baris 12 dan 13 berisikan data-data yang diperlukan untuk reaksi tumpuan $R_{\bar{A}}$ dan $R_{\bar{B}}$ yang menjadi sudut putar tumpuan α, β dikalikan dengan $E \cdot I$ dan baris 14 s/d 17 berisikan data-data dari beban oleh bobot-beban W.

titik	x	λ	P_k	Q	Q_l	M_k	I_c/I_k	λ'	m_k	n_k	$\frac{EI_c}{W_k}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{EI_c \cdot W_{k\bar{x}}}{l}$	Q	$\bar{Q}$	$\bar{M}_k$	δ_k
Dim.	[m]	[m]	[t]	[t]	[tm]	[tm]		[m]	[tm²]	[tm²]	[tm²]		[tm²]	[tm²]	[tm²]	[tm²]	[cm]
baris	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0,00		0,75			0,00			0	7,15	1,19	0,000	0,00			0,00	0
		0,75		+6,90	+5,17		1,845	1,383						53,90	40,42		
1	0,75		1,50			+ 5,17			14,3	27,05	6,88	0,0735	0,51			40,42	0,435
		0,75		+5,40	+4,05		1,845	1,383						47,02	35,27		
2	1,50		1,65			+ 9,22			32,65	27,95	10,1	0,147	1,49			75,69	0,815
		0,90		+3,75	+3,38		1,0	0,90						36,92	33,23		
3	2,40		1,80			+12,60			31,0	35,6	11,1	0,2355	2,61			108,92	1,17
		0,90		+1,95	+1,76		1,0	0,90						25,82	23,24		
4	3,30		1,80			+14,36			37,2	38,9	12,7	0,3235	4,11			132,16	1,42
		0,90		+0,15	+0,14		1,0	0,90						13,12	11,81		
5	4,20		1,80			+14,50			39,0	37,8	12,8	0,412	5,27			143,97	1,55
		0,90		−1,65	−1,49		1,0	0,90						0,32	0,29		
6	5,10		0,90			+13,01			36,5	33,0	11,6	0,500	5,80			144,26	1,55
		0,90		−2,55	−2,30		1,0	0,90						−11,28	−10,15		
7	6,00		—			+10,71			31,0	26,85	9,64	0,588	5,67			134,11	1,44
		0,90		−2,55	−2,30		1,0	0,90						−20,92	−18,83		
8	6,90		—			+ 8,41			24,75	20,6	7,55	0,676	5,11			115,28	1,24
		0,90		−2,55	−2,30		1,0	0,90						−28,47	−25,62		
9	7,80		—			+ 6,11			18,6	14,4	5,50	0,765	4,21			89,66	0,985
		0,90		−2,55	−2,30		1,0	0,90						−33,97	−30,57		
10	8,70		—			+ 3,81			12,35	13,15	4,25	0,853	3,63			59,60	0,635
		0,75		−2,55	−1,91		1,845	1,383						−38,22	−28,67		
11	9,45		—			+ 1,90			10,5	5,25	2,62	0,927	2,43			30,42	0,327
		0,75		−2,55	−1,91		1,845	1,383						−40,84	−30,63		
12	10,20		—			0,00			2,63	0	0,44	1,000	0,44			0,00	0
	$R_A = 7,65$ t		$R_B = 2,55$ t								96,37	$R_{\bar{A}} = 41,28$ t		$R_{\bar{B}} = 55,09$ t			

Bobot-beban W ditentukan menurut rumus (8. 27.):

$$6\,EI_c\,W_k = (M_{k-1} + 2\,M_k)\,\lambda'_k + (2\,M_k + M_{k+1})\,\lambda'_{k+1}$$

$$6\,EI_c\,W_k = m_k + n_k$$

$$EI_c\,W_k = \frac{1}{6}\,(m_k + n_k)$$

Misalnya pada titik 4:

$$6\,EI_c\,W_4 = (M_3 + 2\,M_4)\,\lambda'_4 + (2\,M_4 + M_5)\,\lambda'_5 = m_4 + n_4$$

$$m_4 = (12{,}60 + 2 \cdot 14{,}36) \cdot 0{,}90 = 37{,}2\ \text{tm}^2$$

$$n_4 = (2 \cdot 14{,}36 + 14{,}50) \cdot 0{,}90 = 38{,}9\ \text{tm}^2$$

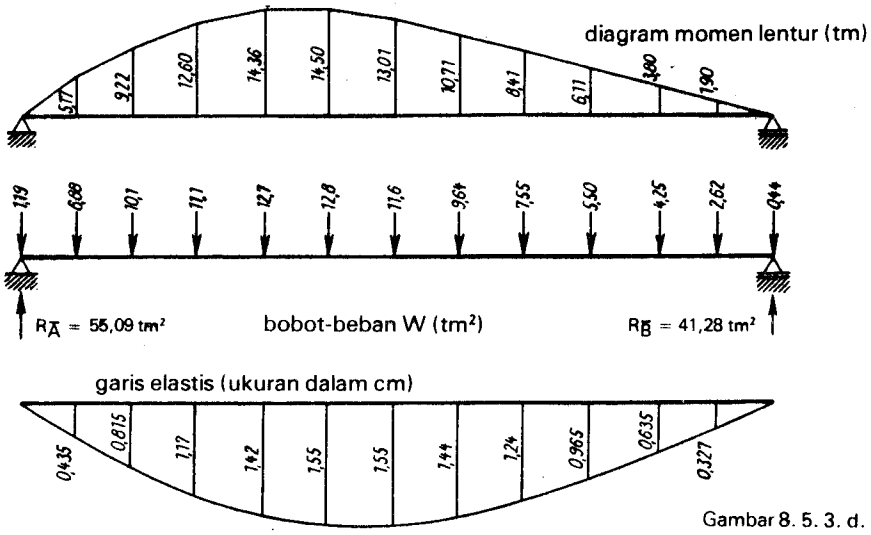
$$EI_cW_4 = \frac{1}{6}\,(37{,}2 + 38{,}9) = 12{,}7\ \text{tm}^2$$

Penentuan R_A dan R_B seperti berikut:

$$R_B = \frac{1}{l}\,EI_c\Sigma W_i x_i = EI_c\,\Sigma W_i\,\frac{x_i}{l}$$

$$R_A = EI_c\,\Sigma W_i - R_B = EI_c\Sigma W_i - EI_c\,\Sigma W_i\,\frac{x_i}{l}$$

Hasil masing-masing boleh digambar seperti berikut sampai kita mendapat garis elastis:



Gambar 8. 5. 3. d.

8. 6. Garis elastis pada konstruksi rangka batang

8. 6. 1. Pengetahuan dasar

Pada konstruksi batang garis elastis menjadi garis sumbu batang yang melengkung. Pada konstruksi rangka batang ketentuan ini tidak lagi benar, oleh karena perubahan bentuk berasal dari perubahan panjangnya batang masing-masing, dan pergeseran titik simpul masing-masing selanjutnya.

Pada konstruksi rangka batang kita menentukan suatu garis elastis pada batang tepi bawah. Garis elastis ini tidak merupakan suatu garis melengkung, melainkan suatu poligon. Semua batang pada suatu konstruksi rangka batang harus tetap menjadi lurus, karen mereka menerima gaya normal saja dan bukan momen lentur. Garis elastis pada suatu batang tepi menjadi tentu sesudah pergeseran masing-masing titik simpul menjadi tetap.

Dengan *diagram pergeseran Williot* kita mengetahui secara grafis untuk menentukan pergeseran titik simpul pada konstruksi rangka batang, walaupun dalam rangka buku ini, kita tidak bisa mempelajari diagram pergeseran Williot tsb. di atas.

Pada konstruksi rangka batang dengan hanya beberapa titik simpul dan bentuknya simetris kita bisa menggunakan rumus jumlahan, yang akan diterangkan pada bab ini. Hanya jangan meremehkan keluasan kumpulan angka-angka.

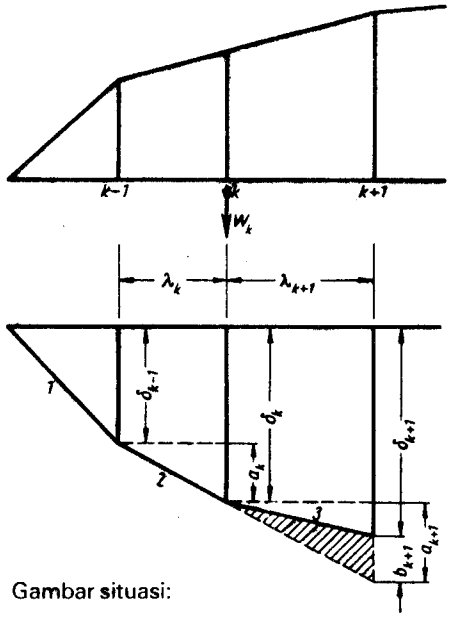
Pada konstruksi rangka batang dengan banyak titik simpul kita selanjutnya menentukan suatu perhitungan atas dasar perhitungan garis elastis pada konstruksi batang.

8. 6. 2. Penentuan garis elastis dengan bobot-beban W pada konstruksi rangka batang

Penentuan garis elastis pada konstruksi batang dilaksanakan dengan bobot-beban W. Bobot-beban W itu yang dikalikan dengan $E \cdot I$ menjadi suatu bagian dari diagram momen. Kita mengerti, bahwa kejadian ini tidak mungkin pada konstruksi rangka batang, oleh karena pada konstruksi ini hanya timbul gaya normal dan bukan momen lentur. Berdasarkan atas pengetahuan ini kita harus menentukan pertama bobot-beban W pada konstruksi rangka batang dengan rumus-rumus yang baru. Sesudah bobot-beban W ditentukan, baru kita boleh menyelesaikasn perhitungan seperti pada konstruksi batang.

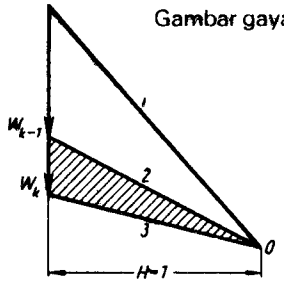
Atau dengan kata-kata lain kita memilih suatu balok tunggal sebagai sistim dasar dan membebani sistim dasar ini dengan bobot-beban W yang ditentukan secara baru dan kemudian menggambar diagram momen yang menentukan garis elastis konstruksi rangka batang itu.

Selanjutnya kita menentukan bobot-beban W pada konstruksi rangka batang:



Gambar situasi:

Gambar gaya:



Gambar 8. 6. 2. a.

Pada gambar 8. 6. 2. a. tsb. di atas kita lihat suatu bagian konstruksi rangka batang dengan garis elastis pada batang tepi bawah. Garis elastis dapat ditentukan dengan gambar poligon batang tarik oleh bobot-beban W. Atas dasar pengertian konstruksi grafis ini kita boleh menentukan perbandingan-perbandingan berikut:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \qquad a_k \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = a_{k+1}$$

dan selanjutnya:

$$a_k = \delta_k - \delta_{k-1} \qquad a_{k+1} = \delta_{k+1} = \delta_{k+1} - \delta_k + b_{k+1}$$

Jikalau kita kemudian membandingkan segitiga yang diarsir pada gambar situasi dan gambar gaya (lihat gambar 8. 6. 2. a.). Oleh karena semua tiga sisi menjadi sejajar kita boleh mengatakan segitiga-segitiga itu menjadi sebangun dan perbandingan dibaca seperti berikut:

$$\frac{b_{k+1}}{\lambda_{k+1}} = \frac{W_k}{H} \text{ dan } b_{k+1} = W_k \lambda_{k+1} \quad \text{jikalau } H = 1$$

Kita selanjutnya mengisi hasil a_k; a_{k+1} dan b_{k+1} ke dalam rumus tsb. di atas dengan tujuan menentukan hubungan antara bobot-beban W dengan ordinat garis elastis:

$$(\delta_k - \delta_{k-1}) \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = (\delta_{k+1} - \delta_k) + W_k \lambda_{k+1}$$

$$\frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{\lambda_k} = \frac{\delta_{k-1} - \delta_k}{\lambda_{k+1}} + W_k$$

$$\boxed{W_k = \frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{\delta_k} - \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{\lambda_{k+1}}} \qquad (8.\ 33.)$$

Pada rumus (8. 33.) ini hubungan antara bobot-beban W dengan ordinat garis elastis sudah ada, walaupun rumus ini belum dapat digunakan untuk perhitungan nilai bobot-beban W_k.

Selanjutnya kita mengubah rumus (8. 33.) sebagai berikut:

$$W_k = \frac{\delta_k}{\lambda_k} - \frac{\delta_{k-1}}{\lambda_k} - \frac{\delta_{k+1}}{\lambda_{k+1}} + \frac{\delta_k}{\lambda_{k+1}}$$

$$W_k = -\frac{1}{\lambda_k}\delta_{k-1} + \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\delta_k - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\delta_{k+1}$$

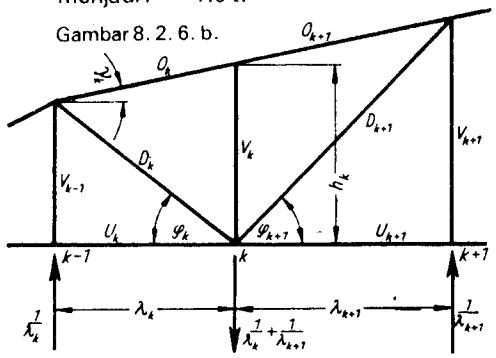
Rumus ini terdiri dari hasil kali faktornya yang menjadi pergeseran sebenarnya. Kalau kita mengetahui $1/\lambda_k$ dan $1/\lambda_{k+1}$ sebagai beban virtual dengan hasilnya, bahwa bobot-beban W sebetulnya menjadi kerja virtual luar. Pada bab 8. 2. 2. (Persamaan kerja pada konstruksi batang) kita sudah menentukan, bahwa kerja virtual luar (A_a) menjadi sama dengan kerja virtual dalam (A_i).

Atas dasar pengetahuan ini kita boleh menentukan bobot-beban W sebagai:

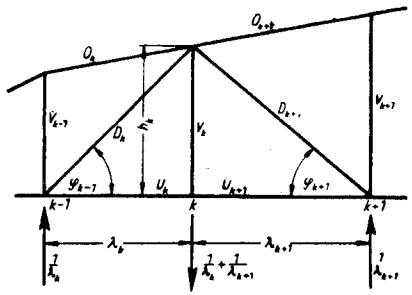
$$\boxed{W_k = \Sigma \bar{S} \triangle s} \qquad (8.\ 34.)$$

Dalam rumus (8. 34.) ini $\triangle s$ menjadi perubahan panjangnya batang s oleh beban yang sebenarnya. $\bar{S}$ menjadi gaya oleh beban virtual $1/\lambda_k$ dan $1/\lambda_{k+1}$. Pada gambar 8. 6. 2. b. kita melihat beban kerja virtual yang harus kita pasang pada titik simpul k untuk menentukan bobot-beban W. kita juga melihat, bahwa jumlah beban menjadi seimbang. Harus dikatakan di sini, bahwa beban virtual tidak selalu harus menjadi $\bar{P} = 1.0$ t.

Gambar 8. 2. 6. b.



Gambar 8. 2. 6. c.



Oleh karena kumpulan beban virtual menjadi seimbang mereka tidak menyebabkan reaksi-reaksi tumpuan. Oleh karena itu hanya batang-batang antara titik simpul $k-1$ dan $k+1$ menerima beban $\bar{S}$. Tanda Σ dalam rumus (8. 34.) selanjutnya hanya berisi bagian konstruksi rangka batang tsb. di atas. Jikalau kita pada kumpulan gaya virtual menentukan dimensi sebagai (1/dimensi panjangnya) kita mendapat bobot-beban W tanpa dimensi.

Bobot-beban W pada konstruksi rangka batang pada umumnya ditentukan menurut gambar 8. 2. 6. b. dan c. seperti berikut:

Gaya virtual S menurut gambar 8. 2. 6. b.:

$$O_k = O_{k+1} = -\frac{1}{h_k \cos\gamma_k} \qquad U_k = U_{k+1} = 0$$

$$D_k = +\frac{1}{h_k \cos\varphi_k} \qquad D_{k+1} = +\frac{1}{h_k \cos\varphi_{k+1}}$$

$$V_{k-1} = -\frac{1}{\lambda_k} \qquad V_k = 0 \qquad V_{k+1} = -\frac{1}{\lambda_{k+1}}$$

Gaya virtual $\bar{S}$ menurut gambar 8. 2. 6. c.:

$$U_k = U_{k+1} = +\frac{1}{h_k} \qquad O_k = O_{k+1} = 0$$

$$D_k = -\frac{1}{h_k \cos\varphi_{k-1}} \qquad D\varphi_{k+1} = -\frac{1}{h_k \cos\varphi_{k+1}}$$

$$V\varphi_{k-1} = 0 \qquad V_k = +\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda\varphi_{k+1}} \qquad V\varphi_{k+1} = 0$$

Selanjutnya pada konstruksi rangka batang dengan diagonal yang naik (gambar 8. 2. 6. b.), kita boleh menentukan bobot-beban W sebagai:

$$W_k = -\frac{1}{h_k \cos\gamma_k}(\Delta o_k + \Delta o_{k+1}) + \frac{1}{h_k \cos\varphi_k}\Delta d_k + \frac{1}{h_k \cos\varphi_{k+1}}\Delta d_{k+1} - \frac{1}{\lambda_k}\Delta v_{k-1} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Delta v_{k+1}$$

(8. 35.)

dan pada konstruksi rangka batang dengan diagonal yang turun (gambar 8. 2. 6. c.), bobot-beban W menjadi:

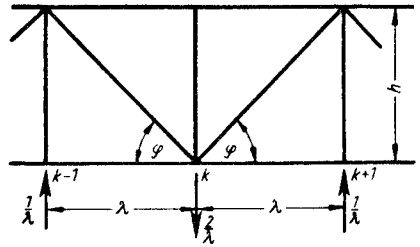
$$W_k = +\frac{1}{h_k}(\Delta u_k + \Delta u_{k+1}) - \frac{1}{h_k \cos\varphi_{k-1}}\Delta d_k - \frac{1}{h_k \cos\varphi_{k+1}}\Delta d_{k+1} + \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\Delta v_k$$

(8. 36.)

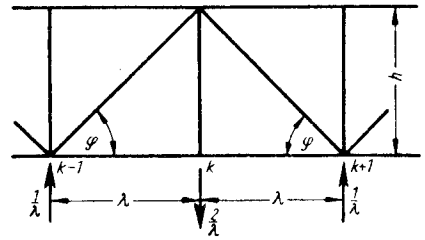
Dengan rumus (8. 35.) dan rumus (8.36.) ini kita bisa menentukan bobot-beban W pada konstruksi rangka batang. Harus diperhatikan tanda $(+,-)$ pada perobahan panjangnya Δs pada batang masing-masing.

Pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi atas dan bawah sejajar dan masing-masing bagian dengan ukuran yang sama kita boleh menentukan:

$\gamma_k = 0 \qquad \varphi_k = \varphi_{k+1} = \varphi$ = konstant tetap)
$\lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda$ = konstant
$h_k = h$ = konstant



Gambar 8. 2. 6. d.



Gambar 8. 2. 6. e.

Selanjutnya pada konstruksi rangka batang dengan diagonal yang naik (gambar 8. 2. 6. d.), kita boleh menentukan bobot-beban W sebagai:

$$W_k = -\frac{1}{h}(\Delta o_k + \Delta o_{k+1}) + \frac{1}{\lambda \sin\varphi}(\Delta d_k + \Delta d_{k+1}) - \frac{1}{\lambda}(\Delta v_{k-1} + \Delta v_{k+1})$$

(8.37.)

dan pada konstruksi rangka batang dengan diagonal yang turun (gambar 8.2.6. e.), bobot-beban W menjadi:

$$W_k = \frac{1}{h}(\Delta u_k + \Delta u_{k+1}) - \frac{1}{\lambda \sin\varphi}(\Delta d_k + \Delta d_{k+1}) + \frac{1}{\lambda}\Delta v_k \qquad (8.38.)$$

Sesudah kita menentukan bobot-beban W kita membebani suatu balok tunggal sebagai sistim dasar dengan bobot-beban W itu dan mendapat garis elastis dengan ordinat yang dikalikan dengan E.

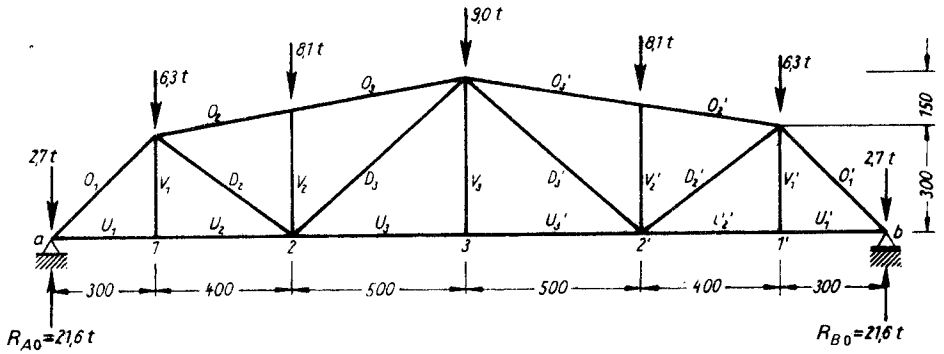
8. 6. 3. Ringkasan

1. Sebagai garis elastis pada konstruksi rangka batang pada umumnya kita tentukan garis elastis pada batang tepi bawah. Garis elastis menjadi suatu poligon bukan garis lengkung, oleh karena batang masing-masing tidak melengkung, hanya berubah panjangnya. Oleh perubahan pada titik simpul masing-masing kita tentukan garis elastis itu.
2. Pada konstruksi rangka batang dengan beberapa titik simpul saja kita boleh menggunakan rumus jumlahan yang berulang kali digunakan.
3. Pada konstruksi rangka batang dengan banyak titik simpul kita menentukan garis elastis dengan bantuan bobot-beban W.
4. Kita menentukan bobot-beban W menurut rumus (8. 35.) s/d rumus (8. 38.). Untuk itu kita memerlukan perubahan panjangnya batang masing-masing oleh beban yang sebenarnya.
5. Dengan bobot-beban W kita membebani sistim dasar — suatu balok tunggal — dan menerima garis elastis sebagai diagram momen.

8. 6. 4. Contoh

Pada konstruksi rangka batang berikut dengan beban yang tentu dan dengan $E = 2'100\ t/cm^2$ harus ditentukan garis elastis menurut/dengan:

1. bantuan rumus jumlahan
2. bantuan bobot-beban W



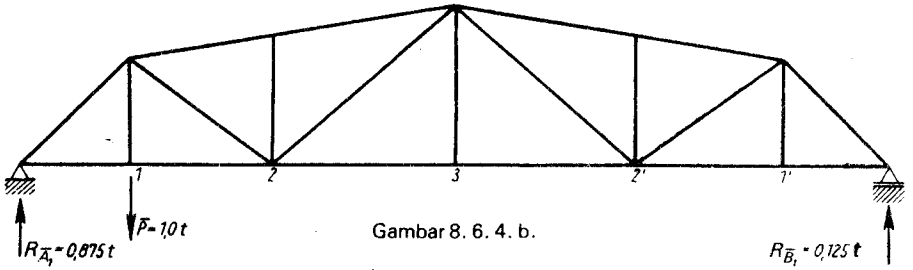
Gambar 8. 6. 4. a.

Penyelesaian:

Pada pertanyaan 1: Karena sistim menjadi simetris kita hanya harus menentukan beban pada batang masing-masing yang sebenarnya S_o dan beban oleh gaya virtual $P = 1.0$ pada titik simpul 1, 2 dan 3 pada batang masing-masing (S_1, S_2 dan S_3).

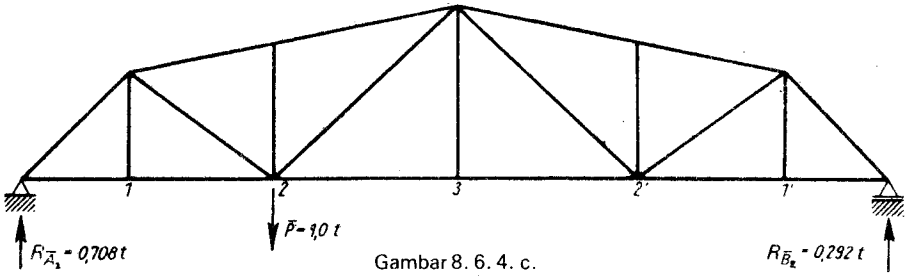
Penentuan ini boleh dilakukan dengan empat kali menggunakan cara grafis (Cremona) atau cara analitis (Cullmann-Ritter). Oleh karena $O_2 = O_3$ dan $O'_2 = O'_3$ dan $U_1 = U_2$ dan $U'_3 = U_3$ dan $U'_2 = U'_1$mempunyai gaya yang masing-masing sama, tabel 1 dijadikan satu batang dengan panjangnya s misalnya $O_2 + O_3$ dsb.

a) Beban virtual $\bar{P} = 1.0$ pada titik simul 1 (nilai $\bar{S}_1$):
Ukuran dan sebagainya seperti pada gambar 8. 6. 4. a.



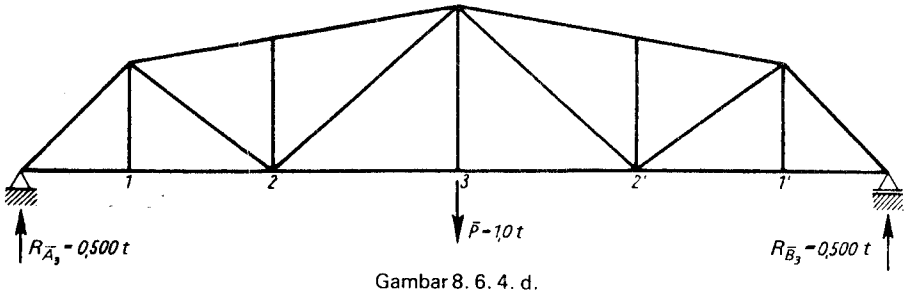
Gambar 8. 6. 4. b.

b) Beban virtual $\bar{P} = 1.0$ pada titik simpul 2 (nilai $\bar{S}_2$):



Gambar 8. 6. 4. c.

c) Beban virtual $\bar{P} = 1.0$ pada titik simpul 3 (nilai $\bar{S}_3$):



Gambar 8. 6. 4. d.

Tabel 1:

Baris 1 s/d 4 berisikan data-data konstruksi rangka batang, baris 5 s/d 8 berisikan gaya batang masing-masing oleh beban sebenarnya dan oleh beban virtual dan baris 9 s/d 11 menjadi hasil rumus jumlahan, yaitu $S_0S_1\ s/F = E.\ \delta_1$ dan $S_0S_2\ s/F = E.\delta_2$ dan $S_0S_3\ s/F = E.\delta_3$.

batang	s	F	s/F	gaya batang				$E\cdot\delta_1$	$E\cdot\delta_2$	$E\cdot\delta_3$
				S_0	S_1	S_2	S_3			
Dim:	*(cm)*	*(cm^2)*	*(cm^{-1})*	*(t)*	*(t)*	*(t)*	*(t)*	*(t/cm)*	*(t/cm)*	*(t/cm)*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
O_1	424	60,0	7,07	−26,7	−1,237	−1,000	−0,707	+ 233,0	+ 188,5	+ 133,1
O_2O_3	912	70,0	13,03	−29,6	−0,587	−1,370	−0,968	+ 226,5	+ 529,0	+ 373,5
$O_3'O_2'$	912	70,0	13,03	−29,6	−0,242	−0,562	−0,968	+ 93,2	+ 217,0	+ 373,5
O_1'	424	60,0	7,07	−26,7	−0,177	−0,410	−0,707	+ 33,4	+ 77,3	+ 133,3
U_1U_2	700	20,2	34,65	+ 18,9	+ 0,875	+ 0,708	+ 0,500	+ 573,5	+ 463,0	+ 327,5
U_2U_3'	1000	24,6	40,70	+ 28,8	+ 0,333	+ 0,778	+ 1,333	+ 390,0	+ 912,0	+ 1563,0
$U_2'U_1'$	700	20,2	34,65	+ 18,9	+ 0,125	+ 0,290	+ 0,500	+ 81,8	+ 189,8	+ 327,5
D_1	500	12,63	39,65	+ 12,9	− 0,309	+ 0,800	+ 0,569	− 188,8	+ 410,0	+ 291,0
D_3	673	9,67	70,00	+ 0,54	+ 0,332	+ 0,772	− 0,509	+ 12,5	+ 29,2	− 19,2
D_2'	673	9,67	70,00	+ 0,54	− 0,128	− 0,301	− 0,509	− 4,8	− 11,4	− 19,2
D_2'	500	12,63	39,65	+ 12,9	+ 0,141	+ 0,328	+ 0,569	+ 72,1	+ 167,7	+ 291,0
V_1	300	9,60	31,25	0,0	+ 1,00	0,00	0,00	0	0	0
V_2	367	31,0	11,82	− 8,1	0,00	0,00	0,00	0	0	0
V_3	450	9,60	46,90	0,0	0,00	0,00	1,000	0	0	0
V_2'	367	31,0	11,82	− 8,1	0,00	0,00	0,00	0	0	0
V_1'	300	9,60	31,25	0,0	0,00	0,00	0,00	0	0	0
Jumlah Σ								+ 1521,9	+ 3172,1	+ 3775,2

Pergeseran vertikal pada titik simpul 1 s/d 3 menurut rumus jumlahan menjadi:

$$\delta_1 = \frac{1521,9}{2100} = 0,725 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = \frac{3172,1}{2100} = 1,51 \text{ cm}$$

$$\delta_3 = \frac{3775,2}{2100} = 1,80 \text{ cm}$$

Pada pertanyaan 2: Pada penentuan garis elastis dengan bobot-beban W kita menentukan pertama perobahan panjangnya batang masing-masing $\Delta s = S_0\ s/F$. Karena itu kita tentukan gaya batang S_0 oleh beban sebenarnya. Semua dihitung sebagai tabel pada tabel 2 yang berikut. Karena konstruksi rangka batang pada contoh ini menjadi simetris kita hanya memperhatikan satu bagian saja.
Penentuan $E\cdot W_1$ dan $E\cdot W_3$ terjadilah dengan rumus (8. 36.) dan $E\cdot W_2$ dengan rumus (8. 35.). Sebagai pendahuluan kita menentukan beberapa nilai yang akan diperlukan untuk menentukan $E\cdot W_1$ s/d $E\cdot W_3$:

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{300} = 0,00333 \qquad \frac{1}{h_3} = \frac{1}{450} = 0,00222$$

$$\frac{1}{h_1 \cos\gamma_1} = \frac{1}{300\cdot 0,707} = 0,000472 \qquad \frac{1}{h_2 \cos\gamma_2} = \frac{1}{367\cdot 0,987} = 0,00276$$

$$\frac{1}{h_1 \cos\varphi_1} = \frac{1}{300\cdot 0,800} = 0,00417 \qquad \frac{1}{h_2 \cos\varphi_2} = \frac{1}{367\cdot 0,800} = 0,00341$$

$$\frac{1}{h_2 \cos\varphi_3} = \frac{1}{367\cdot 0,743} = 0,00367$$

$$\frac{1}{h_3 \cos\varphi_3} = \frac{1}{450\cdot 0,743} = 0,00299$$

Misalnya penentuan W_2 menurut rumus (8.35.):

$$W_2 = -\frac{1}{h_2\cos\gamma_2}(\Delta o_2 + \Delta o_3) + \frac{1}{h_2\cos\varphi_2}\Delta d_2 + \frac{1}{h_2\cos\varphi_3}\Delta d_3 - \frac{1}{\lambda_2}\Delta v_1 - \frac{1}{\lambda_3}\Delta v_3$$

dan selanjutnya:

$$EW_2 = -0,00276\,(-385,0) + 0,00341\cdot 512,0 + 0,00367\cdot 37,9$$

$$EW_2 = +1,062 + 1,745 + 0,139 = 2,946\ \text{t/cm}^2$$

Tabel 2:

batang	*s*	*F*	*S*	*E*△*s*	EW_1	EW_2	$\frac{1}{2}EW_3$
Dimensi	[*cm*]	[cm^2	[*cm*]	[*t/cm*]	[t/cm^2]	[t/cm^2]	[t/cm^2]
1	2	3	4	6	6	7	8
O_1	424	60,0	−26,7	−188,8	+0,89	—	—
O_2O_3	912	70,0	−29,6	−385,0	—	+1,062	—
U_1U_2	700	20,2	+18,9	+655,0	+2,18	—	+1,302
U_3	500	24,6	+28,8	+586,0	—	—	+1,302
D_2	500	12,6	+12,9	+512,0	−2,135	+1,745	—
D_2	673	9,6	+ 0,54	+37,9	—	+0,139	−0,114
V_1	300	9,6	0	0	0	0	—
V_2	367	31,0	− 8,1	− 95,8	—	—	—
V_3	450	9,6	0	0	—	0	0
total					+0,953	+2,946	+1,188

Dengan bobot-beban *W* yang baru ditentukan pada tabel 2 kita akan membebani sistim dasar (balok tunggal) pada/dalam tabel 3, dan mendapat garis elastis dengan pergeseran *ó* pada titik simpul masing-masing.

Tabel 3:

k	EW_k	λ	$E \cdot \bar{Q}$	$E \cdot \bar{Q}.\lambda$	$E\bar{M}$	*ó*
Dim.	[t/cm^2]	[*cm*]	[t/cm^2]	[*t/cm*]	[*t/cm*]	[*cm*]
Sp.	1	2	3	4	5	6
a	—				0	0
1	0,953				1526,1	0,725
		400	4,134	1653,6		
2	2,946				3179,7	1,51
		500	1,188	594,0		
3	2,376				3773,7	1,80

Hasil-hasil ini menjadi sama dengan hasil-hasil pada pertanyaan 1, walaupun pekerjaan pada pertanyaan 2 (dengan mengunakan bobot-beban *W*) jauh lebih sederhana daripada dengan penggunaan rumus jumlahan.

9. Garis pengaruh

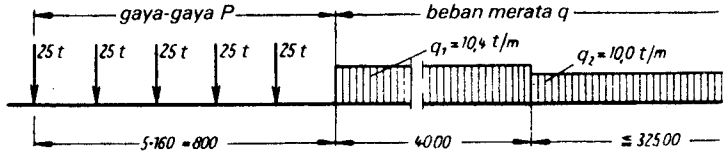
9. 1. Pengetahuan dasar dan penggunaan garis pengaruh

9. 1. 1. Pengetahuan dasar

Dengan ketentuan-ketentuan statika yang kita ketahui sampai sekarang, kita dapat menentukan reaksi tumpuan dan gaya batang pada suatu konstruksi batang atau rangka batang dan kemudian menentukan ukuran batang, tegangan-tegangan yang timbul dan perubahan bentuk elastis. Penentuan-penentuan ini selalu berdasarkan atas beban dan gaya yang tentu dengan nilai, jurusan dan titik tangkapnya. Pada beban merata kita memperhatikan berat sendiri beserta beban berguna, yang walaupun bergerak dan tidak tetap, dihitung juga seperti beban tetap. Akan tetapi pada banyak konstruksi bangunan timbul beban bergerak misalnya jembatan lalu lintas, jembatan kereta api, rel derek dsb. dengan titik tangkapnya yang selalu beralih-alih. Pada umumnya beban bergerak ini bekerja sejajar anting dan pada bab ini kita hanya memperhatikan beban yang berjurusan sejajar anting. Kemudian juga beban bergerak ini berjarak tetap.

Pada beban yang tetap (mati) walau gaya-gaya dalam suatu batang berubah, pada tiap-tiap potongan tertentu ada juga gaya-gaya dalam tertentu. Pada beban yang bergerak nilai gaya dalam berubah pada tiap-tiap gerakan beban itu. Untuk menentukan ukuran-ukuran batang selanjutnya kita harus memperhatikan nilai reaksi tumpuan dan gaya batang yang maksimal dan yang minimal pada potongan masing-masing. Untuk penentuan nilai-nilai maksimal dan minimal ini kita menggunakan *garis pengaruh.*

Gambar 9. 1. 1. a.

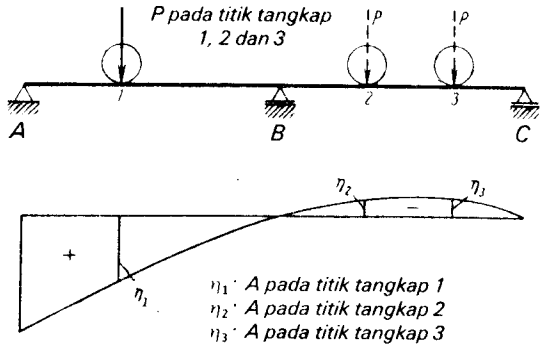


Garis pengaruh harus kita tentukan untuk semua nilai statika seperti reaksi tumpuan, gaya lintang atau lendutan pada suatu titik tertentu, dan menjadi suatu garis dengan sifat khusus masing-masing. Penentuannya hanya menjadi satu bagian dari

soal-soal yang timbul tetapi penggunaannya terletak pada penyelesaian yang menentukan gaya-gaya dalam yang dicari.
Sebagai gaya-gaya P kita menentukan misalnya roda-roda suatu kereta api dsb. dan beban merata menjadi misalnya lalu lintas mobil dsb. seperti dilihat pada gambar 9. 1. 1. a. di atas.

9. 1. 2. Penentuan garis pengaruh

Pada perhitungan statika pada suatu konstruksi batang atau rangka batang dengan gaya-gaya dan beban mati kita menentukan suatu potongan sembarang untuk penentuan gaya-gaya dalam. Juga pada gaya-gaya dan beban yang bergerak kita harus tahu di mana potongan sembarang bermanfaat dan untuk gaya dalam yang mana kita harus menentukan garis pengaruh. Dengan pengetahuan ini kita dapat menentukan titik tangkap dari gaya atau beban yang kita perlukan pada penentuan gaya dalam yang maksimal dan yang minimal. Walau nilai maksimal dan minimal ini mungkin tidak menjadi nilai maksimal dan minimal pada batang yang diperhatikan, namun menolong menentukan garis pengaruh dan titik tangkap yang bersangkutan.



Gambar 9. 1. 2. a.

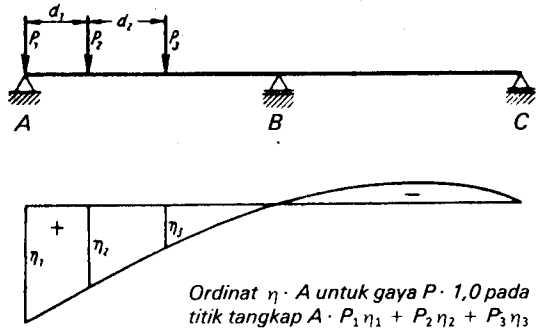
Untuk menentukan garis pengaruh kita menggulingkan suatu gaya P pada seluruh panjangnya konstruksi batang dan menentukan pada tiap-tiap titik tangkap pengaruhnya atas reaksi tumpuan atau gaya dalam.
Sebagai keterangan kita perhatikan gambar 9. 1. 2. a. di atas. Gaya P pada bagian kiri dari balok terusan itu menyebabkan reaksi tumpuan A yang positif (+). Reaksi tumpuan A ini makin besar makin dekat gaya P pada tumpuan A. Jikalau gaya P misalnya bekerja pada bagian kanan, maka reaksi tumpuan A menjadi negatif (−). Nilai reaksi tumpuan A oleh gaya P yang bergerak kita tentukan sebagai ordinat η pada titik tangkap masing-masing. Hubungannya dapat kita lihat pada gambar 9. 1. 2. a. Garis itu sebetulnya sudah menjadi suatu garis pengaruh pada reaksi tumpuan A.

Untuk menentukan ordinat-ordinat η salah satu garis pengaruh kita menggulingkan suatu gaya P = 1 . 0 (t) pada seluruh konstruksi batang.
Pada titik tangkap masing-masing oleh gaya P = 1 . 0 ini kita menentukan pengaruh atas nilai statika yang dicari dan menentukan hasil ini sebagai ordinat η di bawah titik tangkap itu. Ujung-ujung ordinat η masing-masing yang dihubungkan dengan suatu garis kita tentukan sebagai garis pengaruh dan luasnya sebagai bidang pengaruh.

Catatan: Pada beberapa buku statika lain untuk kependekan ordinat garis pengaruh juga digunakan λ atau y.
Ordinat-ordinat pada suatu garis pengaruh dapat menjadi positif atau negatif. Selanjutnya kita menentukan, bahwa ordinat yang positif kita gambar ke bawah dan ordinat yang negatif kita gambar ke atas dari suatu garis dasar dengan titik batasan (η = 0) antaranya. Walaupun suatu garis pengaruh digambar pada seluruh konstruksi batang, pengaruhnya tergantung hanya pada satu titik yang diperhatikan (misalnya tumpuan A). Garis pengaruh menjadi terlepas/bebas dari gaya-gaya atau beban yang bekerja pada konstruksi batang dan dapat juga ditentukan tanpa memperhatikan beban yang bekerja pada konstruksi batang itu.

9. 1. 3. Penggunaan garis pengaruh

Keterangan-keterangan berikut membicarakan satu garis pengaruh pada reaksi tumpuan sebagai contoh. Caranya sebenarnya dapat juga dilakukan pada garis-garis pengaruh yang lain.



Gambar 9. 1. 3. a.

Suatu gaya P = 1 . 0 (t) mengakibatkan pada tumpuan A suatu gaya (reaksi tumpuan) sebesar (1. 0) η. Oleh karena itu, satu gaya sebesar P mengakibatkan suatu reaksi tumpuan sebesar $P . \eta$.
Jikalau pada konstruksi batang di atas bekerja suatu kumpulan gaya dengan n gaya P_i tiap-tiap gaya P_i mengakibatkan reaksi tumpuan $P_i . \eta_i$.

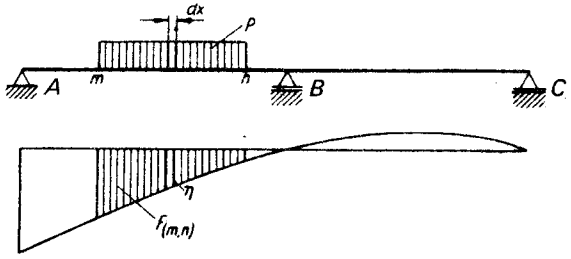
Reaksi tumpuan dapat kita tentukan:

$$R_A = \sum_{i+1}^{i=n} P_i \eta_i \qquad (9.\,1.)$$

Sebagai penentuan reaksi tumpuan R_A dengan bantuan garis pengaruh kita dapat menentukan: tiap-tiap gaya P_i harus dikalikan dengan ordinatnya η_i dengan memperhatikan tanda (+, −) kemudian hasil kali masing-masing dijumlahkan. R_A maksimal kita dapatkan dengan memasang kumpulan gaya itu pada bagian dengan ordinat garis pengaruh η yang positif, dan R_A minimal dengan memasang kumpulan gaya itu pada bagian konstruksi batang dengan ordinat garis pengaruh η yang negatif. Gambar garis pengaruh membantu kita dalam pencarian titik-titik yang paling jelek dan yang paling ideal.

Nilai maksimal kita dapatkan dengan memasang gaya-gaya yang terbesar pada tempat dengan ordinat garis pengaruh η yang terbesar.

Jikalau kita atas dasar ketentuan ini belum dapat menentukan titik-titik tangkap kumpulan gaya, kita harus mendorong kumpulan gaya itu demikian rupa, sehingga gaya berikut bekerja pada titik dengan η_{max}.



Gambar 9. 1. 3. b.

Beban merata akan kita bagi atas potongan dx yang kecil, sehingga beban itu bekerja sebagai satu gaya P. Hasilnya dapat diringkaskan menurut rumus (9. 1.) dan gambar 9. 1. 3. b. di atas sebagai:

$$R_A = \int_m^n q\,dx\,\eta = q\int_m^n \eta\,dx = qF_{(m,n)}$$

Nilai Integral ini menjadi luasnya bidang pengaruh antara titik m dan titik n:

$$R_A = qF_{(m,n)} \qquad (9.\,2.)$$

Pada beban merata kita harus mengalikan ordinat q dari beban merata dengan luasnya bidang pengaruh di bawah beban merata itu.
Nilai maksimal juga kita dapatkan dengan memasang beban merata pada tempat, yang ordinat garis pengaruhnya η terbesar.

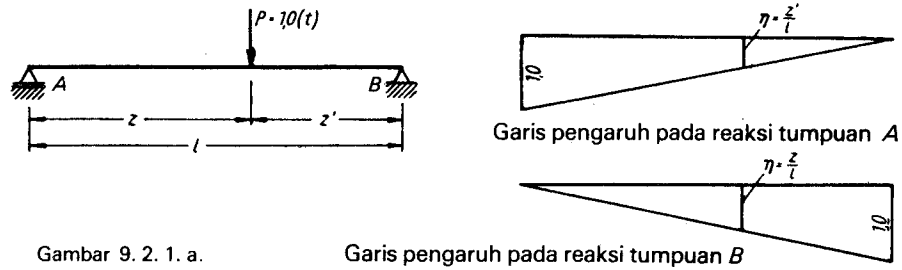
9. 1. 4. Ringkasan

1. Garis pengaruh kita gunakan untuk penentuan nilai maksimal dan minimal pada reaksi tumpuan dan gaya dalam pada beban yang bergerak.
2. Dengan memperhatikan bentuk garis pengaruh dapat kita menentukan cara pembebanan pada suatu konstruksi batang atau rangka batang supaya beban itu mengakibatkan reaksi tumpuan atau gaya dalam yang maksimal atau yang mimimal.
3. Garis pengaruh dapat kita gambar dengan satu gaya $P = 1\,.\,0$ (t) yang kita gulingkan pada seluruh panjangnya konstruksi batang atau rangka batang.
4. Pada penggunaan garis pengaruh kita membebani hanya bagian-bagian dengan ordinat η yang positif atau yang negatif saja. Pada beban merata kita mengalikan beban dengan bidang pengaruh. Pada gaya atau kumpulan gaya kita mengalikan gaya masing-masing dengan ordinatnya η dan menjumlahkan hasil kali itu.
5. Nilai maksimal kita dapatkan dengan memasang gaya-gaya yang terbesar pada tempat, yang ordinat garis pengaruhnya η terbesar.

9. 2. Garis pengaruh pada balok tunggal

9. 2. 1. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan

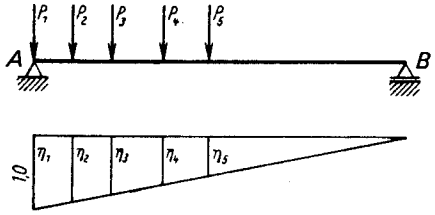
Seperti telah dibicarakan pada bab 9. 1. 2. garis pengaruh pada misalnya tumpuan A dapat kita tentukan dengan menggulingkan suatu gaya $P = 1{,}0$ (t) pada seluruh panjangnya lebar bentang 1 pada balok tunggal yang diperhatikan. Pada tumpuan A gaya $P = 1{,}0$ mengakibatkan suatu reaksi tumpuan sebesar $R_A = 1{,}0$ yang menentukan ordinat η garis pengaruh sebagai $\eta = 1{,}0.'$ Jikalau gaya $P = 1{,}0$ bekerja pada tumpuan B reaksi tumpuan pada tumpuan A menjadi nol ($R_A = 0$).
Oleh karena itu, ordinat η garis pengaruh pada tumpuan B menjadi $\eta = 0$ juga.
Jikalau gaya $P = 1{,}0$ bekerja pada titik tangkap sembarang dapat kita tentukan reaksi tumpuan A sebagai $R_A = 1{,}0\,.\,z'/l$ *dengan ordinat* η garis pengaruh sebagai $\eta = z'/l \cdot 1{,}0.$
Hasil ini menjadi persamaan suatu garis lurus, dan berarti, bahwa kita boleh menghubungkan titik ordinat $\eta = 1{,}0$ pada tumpuan A dengan titik ordinat $\eta = 0$ pada tumpuan B seperti terlihat pada gambar 9. 2. 1. a. berikut:



Gambar 9. 2. 1. a.

Jikalau kita ingin menggambar garis pengaruh pada reaksi tumpuan B kita dapati ordinat η garis pengaruh pada tumpuan B sebagai $\eta = 1{,}0$ dan pada tumpuan A sebagai $\eta = 0$. Lihat juga gambar 9. 2. 1. a. di atas (Penggunaan garis pengaruh).
Maka pada penentuan reaksi tumpuan oleh kumpulan gaya yang tertentu, dan bekerja pada bagian garis pengaruh dengan ordinat η besar kita dapat menentukan reaksi tumpuan A sebagai jumlah gaya-gaya yang dikalikan dengan ordinat η masing-masing seperti juga terlihat pada gambar 9. 2. 1. b. berikut:

$$R_A = \Sigma P_i \eta_i = \Sigma P_i \frac{z_i'}{l} = \frac{1}{l} \Sigma P_i z_i'$$

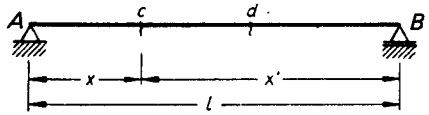


Gambar 9. 2. 1. b.

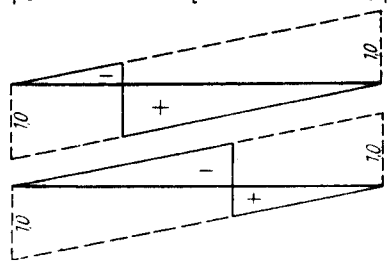
Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A

9. 2. 2. Garis pengaruh pada gaya lintang

Gaya lintang sebetulnya jumlah semua gaya yang bekerja siku-siku pada garis sumbu batang (balok tunggal) sebelah kiri atau yang dalam hubungan yang sama sebelah kanan pada suatu potongan. Jikalau suatu gaya $P = 1.0$ bekerja sebelah kanan dari potongan c maka gaya lintang $Q_c = R_A$.
Oleh karena itu pada suatu gaya $P = 1.0$ yang bekerja antara potongan c dan tumpuan B garis pengaruh gaya lintang menjadi juga garis pengaruh reaksi tumpuan A.
Jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja sebelah kiri dari potongan c maka gaya lintang $Q_c = R_A - 1.0 = -R_B$. Oleh karena itu pada suatu gaya $P = 1.0$ yang bekerja antara tumpuan A dan potongan c garis pengaruh pada gaya lintang menjadi juga garis pengaruh pada reaksi tumpuan B yang negatif. Lihat gambar 9. 2. 2. a. berikut:



Gambar 9. 2. 2. a.



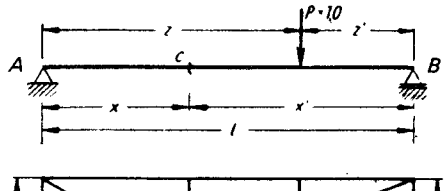
Garis pengaruh pada gaya lintang Q_c

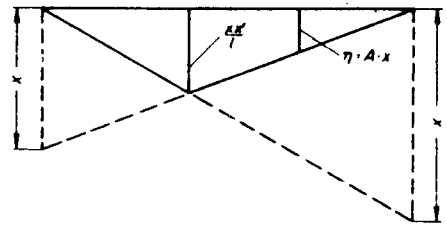
Garis pengaruh pada gaya lintang Q_d

Kita dapat menggambar garis pengaruh pada gaya lintang pada suatu potongan sembarang dengan menentukan ordinat η garis pengaruh pada tumpuan A sebagai $\eta = 1{,}0$ dan pada tumpuan B sebagai $\eta = -1{,}0$.
Hubungan vertikal antara dua garis ini dapat kita gambar pada potongan sembarang.
Penggunaan garis pengaruh pada gaya lintang kita lakukan dengan mengalikan bagian ordinat η yang positif dengan Q dan bagian ordinat η yang negatif dengan gaya lintang Q.

9. 2. 3. Garis pengaruh pada momen lentur

Sudah kita ketahui, bahwa suatu gaya $P = 1{,}0$ pada suatu balok tunggal pada tumpuan masing-masing tidak mengakibatkan suatu momen, dan karena itu ordinat η garis pengaruh pada momen lentur pada tumpuan masing-masing menjadi $\eta = 0$.
Jikalau kita memperhatikan suatu potongan c pada balok tunggal ini dan gaya $P = 1{,}0$ bekerja pada titik potong c, maka gaya $P = 1{,}0$ mengakibatkan suatu momen sebesar $M = 1{,}0 \cdot x \cdot x' / l$.
Hasil ini berarti bahwa ordinat η pada garis pengaruh pada titik potong c juga menjadi $\eta = 1{,}0 \cdot x \cdot x' / l$. Jikalau gaya $P = 1{,}0$ bekerja di sebelah kanan potongan c sembarang, maka momen itu menjadi $M = R_A \cdot x$ dan ordinat $\eta = R_A \cdot x$. Hasil ini berarti, bahwa garis pengaruh ini menjadi garis pengaruh pada reaksi tumpuan A yang dikalikan dengan x, dan menjadi suatu garis lurus.
Gaya $P = 1{,}0$ yang bekerja di sebelah kiri potongan c sembarang mengakibatkan momen $M = R_B \cdot x'$ dan ordinat $\eta = R_B \cdot x'$ yang menjadi garis pengaruh pada reaksi tumpuan B yang dikalikan dengan x'. Lihat gambar 9. 2. 3. a. berikut:





Garis pengaruh pada momen M

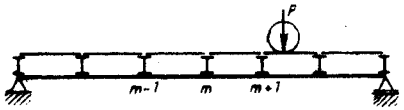
Gambar 9. 2. 3. a.

Kemudian kita dapat menentukan garis pengaruh pada momen lentur dengan menentukan ordinat $\eta = x \cdot x' / l$ pada titik c dan menghubungkan nilai ini dengan titik tumpuan A dan B.

Cara lain dapat juga kita lakukan dengan menggambar ukuran x di bawah tumpuan A dan ukuran x' di bawah tumpuan B, hubungkan titik-titik ini dengan titik tumpuan yang di depan, dua garis lurus ini harus mempunyai titik potong di bawah potongan c dan ordinatnya harus $\eta = x \,.\, x' / l$.

9. 2. 4. Beban yang tidak langsung

Pada banyak jenis konstruksi bangunan, terutama pada konstruksi jembatan beban berguna diterima oleh balok tunggal yang melintang dan yang duduk di atas konstruksi batang utama. Kejadian ini kita namakan beban yang tidak langsung.



Beban yang tidak langsung

Gambar 9. 2. 4. a.

Suatu gaya P yang bekerja antara titik $m-1$ dan titik m mengakibatkan pada titik simpul dengan konstruksi batang utama suatu beban sebesar:

$$P_{m-1} = P\frac{c'}{\lambda} \qquad p_m = P\frac{c}{\lambda}$$

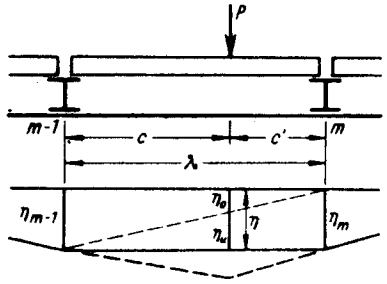
Pada penyelesaiannya gaya P sebenarnya harus menjadi sama dengan jumlah gaya P_m dan P_{m-1} dan kita dapat menentukan:

$$P\eta = P_{m-1}\eta_{m-1} + P_m\eta_m$$

$$P\eta = P\frac{c'}{\lambda}\eta_{m-1} + P\frac{c}{\lambda}\eta_m$$

$$\eta = \frac{c'}{\lambda}\eta_{m-1} + \frac{c'}{\lambda}\eta_m = \eta_o + \eta_u$$

Sebagai keterangan bisa dilihat gambar 9. 2. 4. b. berikut:

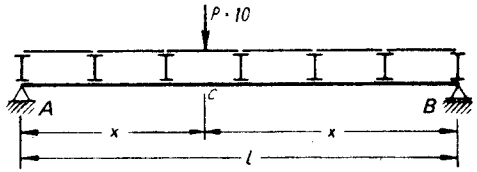


Gambar 9. 2. 4. b.

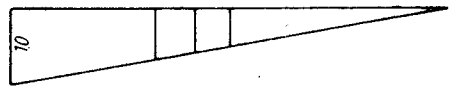
Ordinat η di bawah gaya P sebenarnya terdiri dari dua komponen η_o dan η_u. Nilainya ditentukan dengan garis hubungan ordinat garis pengaruh η_m dan η_{m-1}. Hasil ini dapat kita tulis sebagai:

Pada beban yang tidak langsung garis pengaruh harus menjadi suatu garis lurus.

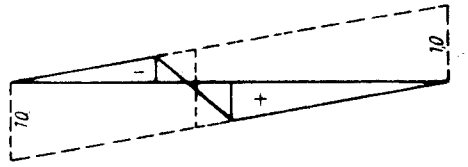
Selanjutnya kita perhatikan satu balok tunggal dengan beban yang tidak langsung menurut gambar 9. 2. 4. c. berikut. Dicari: garis pengaruh pada tumpuan A, pada gaya lintang Q dan momen lentur M.



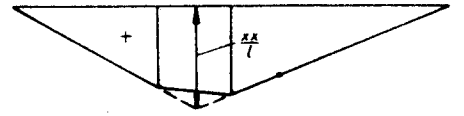
Gambar 9. 2. 4. c.



Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A



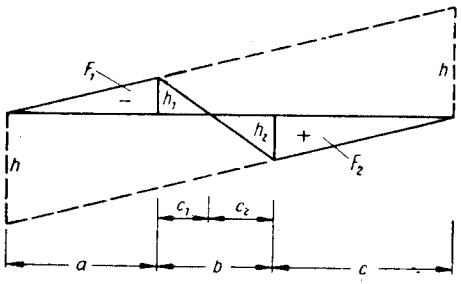
Garis pengaruh pada gaya lintang Q_c



Garis pengaruh pada momen lentur M_c

Kita dapat menggambar garis pengaruh masing-masing pada beban yang tidak langsung seperti garis pengaruh biasa. Kemudian kita menggambar garis hubungan yang lurus antara ordinat η pada titik m dan η pada titik $m-1$, seperti terlihat pada gambar 9. 2. 4. c. di atas.
Dengan menggunakan cara ini kita dapat melihat, bahwa pada garis pengaruh pada reaksi tumpuan tidak ada perubahan. Pada garis pengaruh pada gaya lintang kita dapatkan suatu garis penghubung miring dan pada garis pengaruh pada momen lentur dapat kita potong titik puncak di bawah gaya P.
Pada penyelesaian penentuan ordinat-ordinat pada beban yang tidak langsung sebaiknya kita menghitung dengan perbandingan-perbandingan berikut.
Pada beban merata yang tidak langsung garis pengaruh pada gaya lintang menjadi agak sulit karena titik $\eta = 0$ tidak sama dengan titik potong c.

Untuk memudahkan perhitungan kita menentukan luasnya bidang $(+,-)$ F_1 dan F_2 dari bidang pengaruh dan luasnya bidang pengaruh seluruhnya F seperti berikut:



$(\eta = 1{,}0)$

Gambar 9. 2. 4. d.

$$F_1 = -\frac{1}{2} h_1(a+c_1) \qquad h_1 = h\frac{a}{l} \qquad h_2 = h\frac{b}{l}$$

$$c_1 : c = h_1 : (h_1 + h_2) \qquad c_1 = c\frac{a}{a+b}$$

$$F_1 = -\frac{1}{2} h \frac{a}{l}\left(a + c\frac{a}{a+b}\right) = -\frac{1}{2} h \frac{a^2}{l}\frac{a+b+c}{a+b} = -\frac{h}{2}\frac{a^2}{a+b}$$

dan selanjutnya

$$\boxed{F_1 = -\frac{h}{2}\frac{a^2}{a+b} \qquad F_2 = \frac{h}{2}\frac{b^2}{a+b}} \qquad (9.3.)$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{h}{2}\frac{b^2 - a^2}{a+b} = \frac{h}{2}\frac{(b-a)(b+a)}{a+b}$$

$$\boxed{F = F_1 + F_2 = \frac{h}{2}(b-a)} \qquad (9.4.)$$

9. 2. 5. Garis pengaruh pada lendutan

Atas dasar pengetahuan pada bab 2. 8. (Perhitungan lendutan) dan bab 6. 1. 3. (Lendutan) kita perhatikan suatu balok tunggal yang dibebani dengan beberapa gaya. Lendutan pada suatu titik 1 sembarang oleh beban yang sebenarnya kita tentukan dengan kependekan δ_{10}.
Suatu gaya $P = 1.0$ yang bekerja pada titik 1 mengakibatkan lendutan pada titik 1 sebesar δ_{11} dan kemudian oleh gaya P_1 lendutan $P_1 \cdot \delta_{11}$.
Suatu gaya $P = 1.0$ yang bekerja pada titik 2 mengakibatkan lendutan pada titik 1 sebesar δ_{12} dan kemudian oleh gaya P_2 lendutan $P_2 \cdot \delta_{12}$.
Seterusnya kita mendapatkan lendutan $P_3 \cdot \delta_{13}$ s/d $P_n \cdot \delta_{1n}$.

Dengan superposisi pengaruh masing-masing kita dapatkan:

$$\delta_{10} = P_1\delta_{11} + P_2\delta_{12} + P_3\delta_{13} + \ldots + P_n\delta_{1n}$$

Atau menurut syarat dari *Maxwell* (lihat bab 8. 3. 2.) dapat kita tentukan:

$$\delta_{10} = P_1\delta_{11} + P_2\delta_{21} + l_3\delta_{31} + \ldots + P_n\delta_{n\,1}$$

Hasil ini berarti, bahwa δ_{ik} menjadi lendutan atau dengan kata lain ordinat garis elastis pada titik 1, 2, 3, ..., n oleh gaya $P = 1.0$ pada titik 1. Ordinat garis elastis ini kita kalikan dengan nilai gaya P sebenarnya. Jumlah hasil kali masing-masing menjadi lendutan pada titik 1 oleh gaya P_1, P_2, P_3, ..., P_n.
Karena ketentuan ini menjadi sama dengan ketentuan garis pengaruh pada lendutan, dapat kita tentukan:

> Garis pengaruh pada lendutan titik k sembarang menjadi sama seperti garis elastis oleh gaya $P = 1.0$ pada titik k sembarang.

9. 2. 6. Ringkasan

1. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A mempunyai pada titik tumpuan A ordinat $\eta = 1.0$ dan pada titik tumpuan B ordinat $\eta = 0$ dan menjadi suatu garis lurus.
2. Garis pengaruh pada gaya lintang terdiri dari garis pengaruh pada reaksi tumpuan A yang positif dan garis pengaruh pada reaksi tumpuan B yang negatif dengan garis pengubung vertikal pada titik potong c. Garis pengaruh pada gaya lintang menjadi negatif pada bagian balok tunggal sebelah kiri dan menjadi positif pada bagian yang kanan.
3. Garis pengaruh pada momen lentur mempunyai nilai (ordinat) $\eta = x \,.\, x'/l$ pada titik potong c dan ordinat $\eta = 0$ pada titik tumpuan A dan B. Antara titik-titik tertentu ini garis pengaruh menjadi garis lurus.
4. Garis pengaruh pada beban yang tidak langsung harus menjadi garis lurus.
5. Garis pengaruh pada lendutan pada titik k sembarang menjadi sama seperti garis elastis oleh gaya $P = 1.0$ pada titik k sembarang.

9. 2. 7. Contoh-contoh

Contoh 1: Pada gambar 9. 2. 7. 1. a. berikut kita melihat suatu balok tunggal (jembatan) dengan suatu kumpulan gaya (kereta api). Jikalau dua kumpulan gaya itu satu per satu atau bersama bisa lewat jembatan ini, dapat kita tentukan dengan bantuan garis pengaruh nilai-nilai seperti berikut:
1. Reaksi tumpuan A maksimal
2. Momen maksimal pada titik potong c dengan jarak $x = 5.0$ m

Contoh 2: Suatu balok tunggal (jembatan) dengan lebar bentang $l = 25.00$ m dengan balok melintang dengan jarak = 5.00 m dibebani secara tidak langsung oleh kumpulan gaya (kereta api) atau kumpulan gaya (gerbong). Berat sendiri konstruksi batang ini menjadi $g = 1.5$ t/m, lihat juga gambar 9. 2. 7. 2. a. berikut. Tempat kereta api dan gerbong menjadi sembarang. Nilai-nilai yang dicari:

1. Reaksi tumpuan A maksimal
2. Momen maksimal pada titik potong c dengan jarak $x = 10.0$ m
3. Pada titik potong c itu ditentukan gaya lintang
4. Gaya lintang yang maksimal dan yang minimal pada titik potong c' dengan jarak x = 6.00 m.

Penyelesaian:

1. Penentuan reaksi tumpuan A maksimal:

Roda pertama dari kumpulan gaya (kereta api) kita pasang tepat di atas tumpuan A dan kereta api kedua kita pasang sedekat mungkin (lihat gambar 9. 2. 7. 2. b.). Penyelesaian kita pisahkan atas berat sendiri (g) dan kumpulan gaya (P) seperti berikut:

$$R_{Ag} = gF = 1{,}5\frac{1}{2}\,1{,}0.25{,}0 = 18{,}75\text{ t}$$

$$R_{Ap} = 10{,}0\,(1{,}00 + 0{,}94 + 0{,}88 + 0{,}88 + 0{,}82 + 0{,}76 + 0{,}70 + 0{,}46 + 0{,}40 + 0{,}34 + 0{,}28 + 0{,}22 + 0{,}16)$$

$$R_{Ap} = 10{,}0\,.\,6{,}96 = 69{,}6\text{ t}$$

2. Penentuan momen maksimal pada titik potong c dengan x = 10.0 m:

Karena kita pasang kumpulan gaya demikian rupa, sehingga salah satu gaya P bekerja pada titik potong c, kita tidak usah memotong puncak garis pengaruh pada momen lentur dan ordinat η pada titik potong c dengan jarak $x = 10.0$ m dapat kita tentukan sebagai:

$$\eta = \frac{xx'}{l} = \frac{10{,}0.15{,}0}{25{,}0} = 6{,}00$$

Selanjutnya kita pasang kumpulan gaya (kereta api) demikian rupa, sehingga bekerja pada titik potong c dengan jarak $x = 10.0$ m. Sebelah kanan kita tempatkan suatu kereta api lagi dan sebelah kiri suatu gerbong sedekat mungkin (lihat gambar 9. 2. 7. 2. c. berikut) dan terdapat nilai-nilai seperti berikut:

$$M_g = \frac{1}{2}\,25{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot 1{,}5 = 112{,}5\text{ tm}$$

$$M_p = 10{,}0\,(0{,}60 + 1{,}50 + 4{,}20 + 5{,}10 + 6{,}0 + 5{,}40 + 4{,}80 + 4{,}20 + 1{,}80 + 0{,}60)$$

$$M_p = 10{,}0 \cdot 35{,}40 = 354{,}0\text{ tm}$$

Karena kita tidak tahu apakah ini betul-betul menjadi momen M_P maksimal, kita harus juga memeriksa kemungkinan gerbong sebelah kiri dan sebelah kanan dari kereta api itu (lihat gambar 9. 2. 7. 2. d.) dan mendapatkan nilai yang sedikit lebih tinggi dari nilai yang tadi:

$$M_p = 10{,}0\,(0{,}60 + 1{,}50 + 4{,}20 + 5{,}10 + 6{,}00 + 5{,}40 + 4{,}80 + 4{,}20 + 2{,}40 + 1{,}80 + 0{,}20) = 10{,}0.36{,}20 = 362{,}0\text{ tm}$$

3. Penentuan gaya lintang atas dasar beban tadi pada titik potong c dengan jarak x = 10.0 m:

Karena titik potong c dengan jarak $x = 10.0$ m menjadi sama dengan titik tumpuan balok melintang (tiap-tiap 5.0 m) kita hanya dapat menentukan gaya lintang sebelah kiri (l) dan sebelah kanan(r) dari titik potong c itu. Karena garis pengaruh pada beban yang tidak langsung menjadi suatu garis lurus, hasil gaya lintang pada potongan kiri atau kanan dari titik potong c harus menjadi sama (lihat gambar 9. 2. 7. 2. e. dan f. berikut). Pembebanan harus sama seperti ditentukan pada gambar 9. 2. 7. 2. d.

Selanjutnya kita dapatkan hasil gaya lintang sebagai:

$$Q_{gl} = 1{,}5\frac{1{,}0}{2}\,(15{,}0 - 5{,}0) = 7{,}5\text{ t}$$

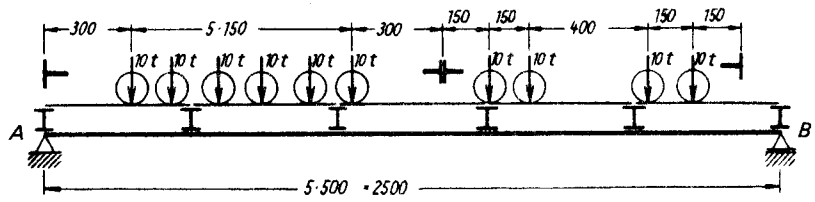
$$Q_{gr} = 1{,}5\frac{1{,}0}{2}\,(10{,}0 - 10{,}0) = 0$$

$$Q_{pl} = 10{,}0\,(-0{,}04 - 0{,}10 + 0{,}12 + 0{,}36 + 0{,}60 + 0{,}54 + 0{,}48 + 0{,}42 + 0{,}24 + 0{,}18 + 0{,}02)$$

$$Q_{pl} = 10{,}0.2{,}82 = 28{,}2\text{ t}$$

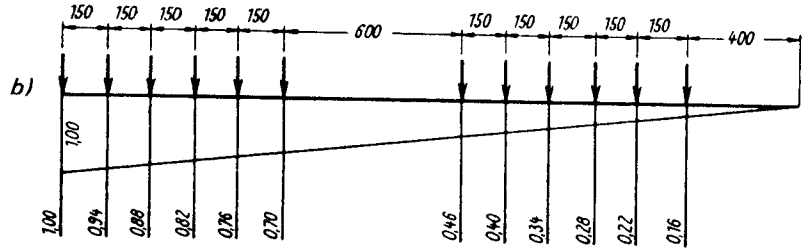
$$Q_{pr} = 10{,}0\,(-0{,}04 - 0{,}10 - 0{,}28 - 0{,}34 - 0{,}40 - 0{,}16 + 0{,}08 + 0{,}32 + 0{,}24 + 0{,}18 + 0{,}02)$$

$$Q_{pr} = 10{,}0\,(-0{,}48) = -4{,}80\text{ t}$$

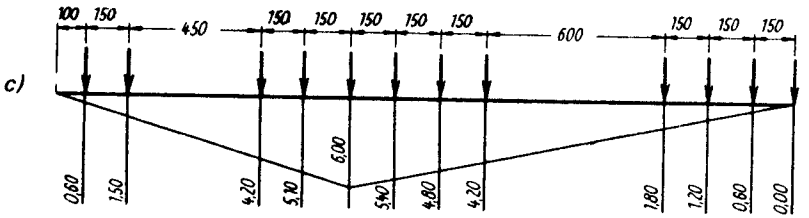


Gambar situasi

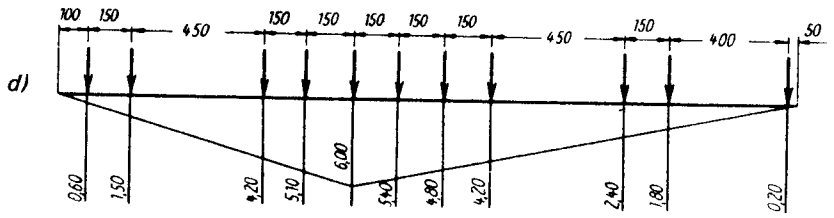
Gambar 9. 2. 7. 2. a.



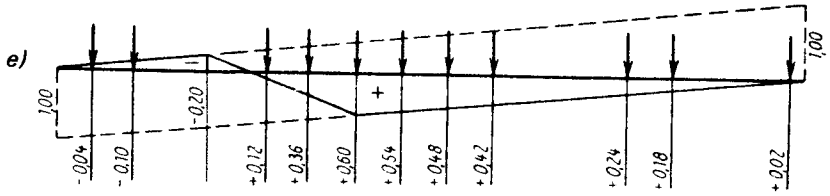
Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A



Garis pengaruh pada momen lentur M_c

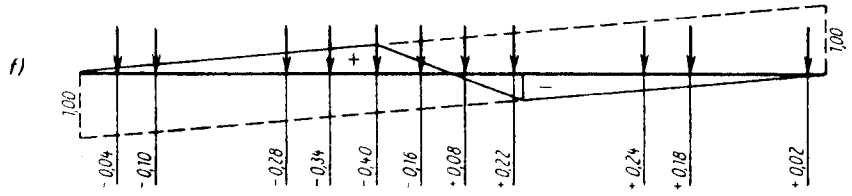


Garis pengaruh pada momen lentur M_c

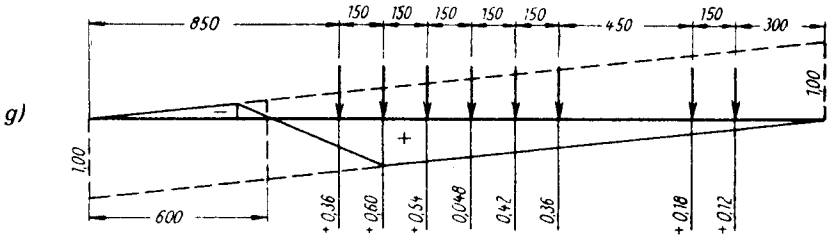


Garis pengaruh pada gaya lintang Q_{cl}

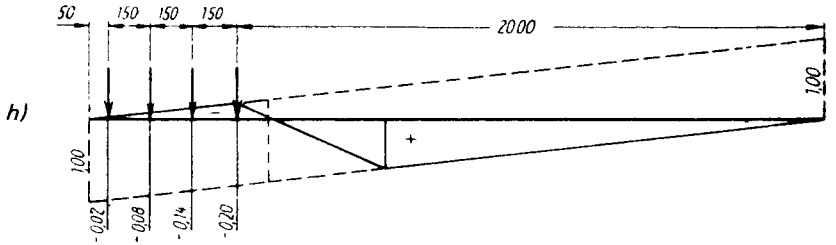
Gambar 9.2.7.2. b. s/d e.



Garis pengaruh pada gaya lintang Q_{cr}



Garis pengaruh pada gaya lintang $Q_{c'\,max}$



Garis pengaruh pada gaya lintang $Q_{c'\,min}$

Gambar 9.2.7.2. f. s/d h.

4. Penentuan gaya lintang yang maksimal dan yang minimal pada titik potong c' dengan jarak x = 6.0 m:

Menurut gambar 9. 2. 7. 2. g. kita mendapatkan $Q_{c'\,max}$ dengan memasang kereta api dan satu gerbong pada bagian garis pengaruh yang positif. Kita mendapatkan hasil:

$$Q_g = 1{,}5\,\frac{1{,}0}{2}\,(15{,}0 - 5{,}0) = 7{,}5\,\text{t}$$

$$Q_{p\,max} = 10{,}0\,(0{,}36 + 0{,}60 + 0{,}54 + 0{,}48 + 0{,}42 + 0{,}36 + 0{,}18 + 0{,}12)$$

$$Q_{p\,max} = 10{,}0.3{,}06 = 30{,}6\,\text{t}$$

Selanjutnya menurut gambar 9. 2. 7. 2. h. kita dapatkan $Q_{c'\,min}$ dengan memasang sebagian dari kereta api pada bagian garis pengaruh yang negatif. Kita mendapatkan hasil:

$$Q_{p\,min} = 10{,}0\,(-0{,}020 - 0{,}080 - 0{,}140 - 0{,}200)$$
$$= 10{,}0\,(-0{,}440) = -4{,}40\ \text{t}$$

9. 3. Garis pengaruh pada konsole, pada balok tunggal dengan konsole dan pada balok rusuk Gerber

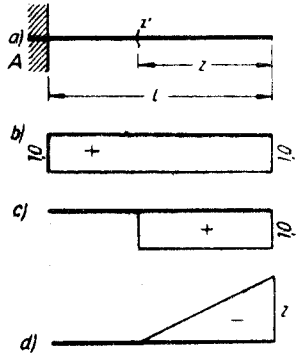
9. 3. 1. Garis pengaruh pada konsole

Penentuan garis pengaruh pada konsole sebenarnya tidak ada kesulitannya.

Jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja pada suatu titik sembarang reaksi tumpuan juga menjadi $R_A = 1.0$, dan garis pengaruh pada suatu titik sembarang juga harus mempunyai ordinat $\eta = 1.0$ maka garis pengaruh ini menjadi suatu segiempat menurut gambar 9. 3. 1. b.

Gaya lintang hanya timbul jikalau $P = 1.0$ bekerja pada ujung konsole yang bebas, yaitu pada gambar 9. 3. 1. a. sebelah kanan dari potongan sembarang z'. Gaya lintang selalu menjadi $Q = 1.0$ tidak terikat pada titik tangkap gaya $P = 1.0$ selama titik tangkap itu berada antara potongan yang kita perhatikan dan ujung konsole yang bebas. Garis pengaruh pada gaya lintang juga menjadi suatu segiempat antara potongan z' yang diperhatikan dan ujung konsole yang bebas, seperti terlihat pada gambar 9. 3. 1. c.

Garis pengaruh pada momen lentur hanya timbul jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja antara titik potong z' yang kita perhatikan dan ujung konsole yang bebas. Antara tumpuan dan titik potong z' ordinat η garis pengaruh menjadi $\eta = 0$. Dari titik potong z' ke kanan ordinat η tumbuh linear sampai gaya $P = 1.0$ bekerja pada titik ujung konsole yang bebas dan mengakibatkan suatu momen sebesar $M = 1{,}0 \cdot z$ dengan ordinat $\eta = z$, seperti terlihat pada gambar 9. 3. 1. d. berikut:



Gambar 9. 3. 1. a. s/d d.

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A

Garis pengaruh pada gaya lintang $Q_{z'}$

Garis pengaruh pada momen lentur $M_{z'}$

Perlu diperhatikan, bahwa tempat tumpuan menentukan tanda $(+,-)$ garis pengaruh pada gaya lintang demikian rupa, sehingga gaya lintang menjadi positif jikalau tumpuan konsole berada di sebelah kiri dan menjadi negatif jikalau tumpuan konsole berada di sebelah kanan.

9. 3. 2. Garis pengaruh pada balok tunggal dengan konsole

Jikalau pada suatu balok tunggal dengan konsole gaya $P = 1.0$ bergerak antara tumpuan A dan B, konsole itu tidak mempengaruhi bentuk garis pengaruh atau dengan kata-kata lain: garis pengaruh pada balok tunggal dengan konsole antara tumpuan A dan B harus sama seperti garis pengaruh pada balok tunggal.

Jikalau gaya $P = 1.0$ bergerak pada konsole yang sebelah kiri, reaksi tumpuan R_A akan tumbuh linear sampai gaya $P = 1.0$ bekerja pada ujung konsole yang bebas dengan nilai:

$$R_A = 1{,}0\frac{a_1 + l}{l}$$

Jikalau gaya $P = 1.0$ bergerak pada konsole yang sebelah kanan, reaksi tumpuan R_B akan tumbuh linear juga dan kita dapat menentukan pengaruh atas tumpuan A sebagai:

$$R_A = -1{,}0\frac{a_2}{l}$$

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A berbentuk selanjutnya seperti terlihat pada gambar 9. 3. 2. b. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan B kita dapatkan secara kiasan (lihat gambar 9. 3. 2. c.).

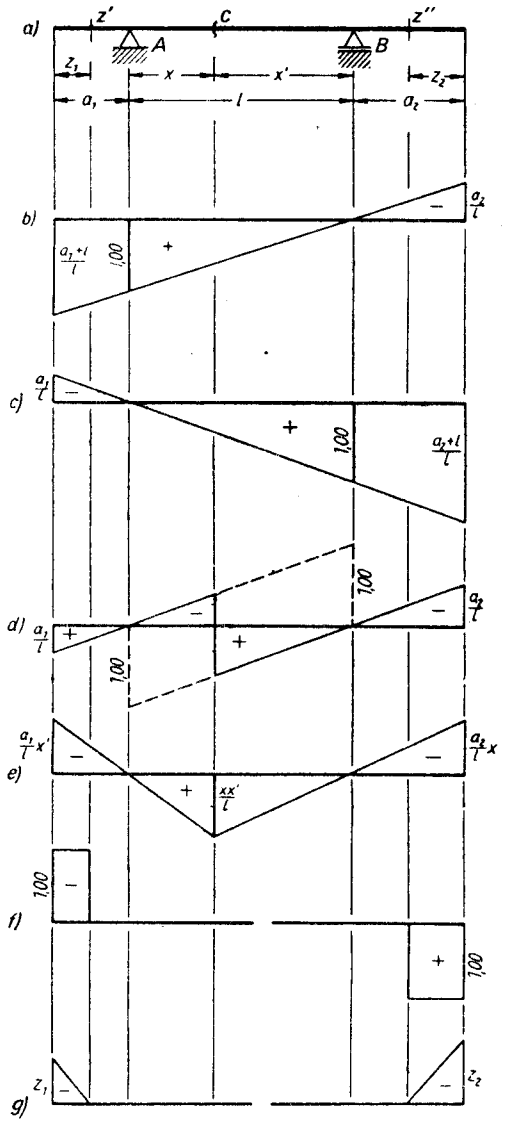
Gaya lintang pada titik potong c menjadi sama pada $P = 1.0$ sebelah kiri dari titik potong c, dengan reaksi tumpuan R_B yang negatif. Pada $P = 1.0$ sebelah kanan dari titik porong c sama dengan reaksi tumpuan R_A. Kejadian ini menentukan garis pengaruh pada gaya lintang Q_c seperti terlihat pada gambar 9. 3. 2. d. berikut.

Momen lentur pada titik potong c menjadi negatif jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja pada salah satu konsole. Hasil atau ordinat η dapat kita tentukan sebagai:

$M = -R_B x' = -\frac{a_1}{l}x'$ pada konsole sebelah kiri, dan

$M = -R_A x = -\frac{a_2}{l}x$ pada konsole sebelah kanan.

Penentuan garis pengaruh pada momen lentur dapat kita lihat pada gambar 9. 3. 2. e. berikut:



Gambar 9. 3. 2. a. s/d g.

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan B

Garis pengaruh pada gaya lintang Q_c

Garis pengaruh pada momen lentur M_c

Garis pengaruh pada gaya lintang $Q_{z'}$ dan $Q_{z''}$

Garis pengaruh pada momen lentur $M_{z'}$ dan $M_{z''}$

Atas dasar gambar 9. 3. 2. b. s/d e. dapat kita tentukan:

> Garis pengaruh pada reaksi tumpuan, pada gaya lintang dan pada momen lentur pada suatu potongan c antara tumpuan A dan B kita dapatkan dengan garis pengaruh pada balok tunggal yang diperpanjang lurus sampai ujung konsole masing-masing.

> Garis pengaruh oleh gaya $P = 1.0$ terhadap potongan z' atau z'' sembarang pada bagian konsole dapat kita tentukan seperti pada konsole biasa pada bab 9. 3. 1. (Garis pengaruh pada konsole).

9. 3. 3. Garis pengaruh pada balok rusuk Gerber

Pada penentuan garis pengaruh pada balok rusuk Gerber kita perhatikan balok rusuk Gerber menurut gambar 9. 3. 3. a s/d h. berikut. Perhitungan balok rusuk Gerber dengan beban yang tetap dapat dilakukan menurut bab 3. 6. (Balok rusuk Gerber).

Ingat, bahwa bagian balok yang bergantung (tumpuan A s/d engsel g_1) pada perhitungan menjadi suatu balok tunggal. Ketentuan ini dapat kita lakukan juga pada penentuan garis pengaruh. Jikalau suatu gaya bekerja sebelah kanan dari engsel g_1 maka gaya itu tidak berpengaruh atas tumpuan A, gaya lintang Q maupun momen lentur M.

Kesimpulan: garis pengaruh pada bagian balok rusuk Gerber yang bergantung hanya menerima pengaruh oleh gaya-gaya pada bagian yang bergantung itu. Lihat juga gambar 9. 3. 3. a., c. dan d.

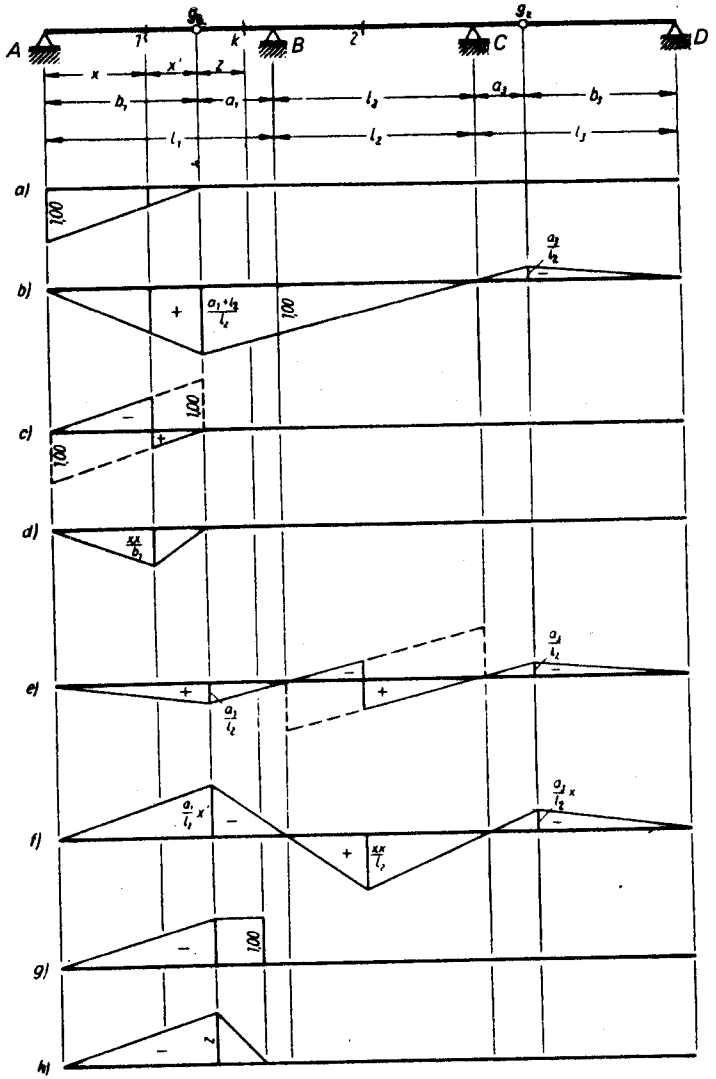
Pada penentuan garis pengaruh bagian balok rusuk Gerber yang menjadi balok tunggal dengan konsole pada kedua ujung (antara engsel g_1 dan g_2) kita perhatikan dahulu bab 9. 3. 2. (Garis pengaruh pada balok tunggal dengan konsole). Jikalau misalnya gaya $P = 1.0$ melewati engsel g_1 pada jurusan ke tumpuan A, maka pengaruhnya atas tumpuan B makin lama makin kecil. Jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja pada tumpuan A gaya P itu tidak mengakibatkan reaksi lagi pada bagian balok rusuk Gerber antara engsel-engsel g_1 dan g_2 maka ordinat garis pengaruh $\eta = 0$.

Atas dasar kejadian ini dapat kita tentukan garis pengaruh pada bagian balok rusuk Gerber antara engsel-engsel g_1 dan g_2 pada reaksi tumpuan R_B, gaya lintang Q_2 atau momen lentur M_2, seperti pada balok tunggal dengan konsole. Kemudian dari ujung konsole yang menjadi engsel g_1 atau g_2 kita hubungkan titik itu dengan titik tumpuan A atau D, masing-masing karena ordinat $\eta = 0$. Lihat juga gambar 9. 3. 3. b., e., f., g. dan h. berikut.

Pada balok rusuk Gerber dengan beban yang tidak langsung, ketentuan-ketentuan dapat kita lihat pada bab 9. 2. 4. (Beban yang tidak langsung).

Akhirnya dapat kita tentukan:

1. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan, pada gaya lintang dan pada momen lentur terdiri dari garis-garis yang lurus.
2. Garis pengaruh pada semua tumpuan mendapat ordinat $\eta = 0$ dengan kekecualian misalnya tumpuan A pada garis pengaruh pada reaksi tumpuan A dsb.
3. Garis pengaruh pada tiap-tiap titik engsel mengubah jurusan (titik engsel = titik patahan garis pengaruh).



Gambar 9. 3. 3. a. s/d h.

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan B

Garis pengaruh pada gaya lintang Q_1

Garis pengaruh pada momen lentur M_1

Garis pengaruh pada gaya lintang Q_2

Garis pengaruh pada momen lentur M_2

Garis pengaruh pada gaya lintang Q_k

Garis pengaruh pada momen lentur M_k

9. 3. 4. Ringkasan

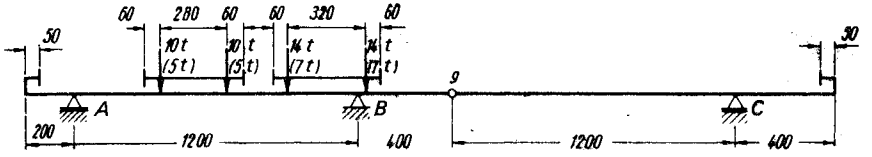
1. Garis pengaruh pada konsole membentuk pada reaksi tumpuan dan pada gaya lintang suatu persegi empat dan pada momen lentur suatu segitiga dengan titik puncak di atas ujung konsole yang bebas dan titik ordinat $\eta = 0$ pada potongan yang diperhatikan.

2. Garis pengaruh pada balok tunggal dengan konsole pada reaksi tumpuan, pada gaya lintang dan pada momen lentur pada suatu potongan sembarang antara dua tumpuan balok tunggal ini kita dapatkan dengan memperpanjangkan lurus garis pengaruh pada balok tunggal sampai ujung konsole masing-masing.
3. Garis pengaruh pada balok tunggal dengan konsole pada reaksi tumpuan, pada gaya lintang dan pada momen lentur pada suatu potongan sembarang pada bagian konsole, dapat kita tentukan seperti pada konsole biasa.
4. Garis pengaruh pada bagian balok rusuk Gerber yang bergantung, dapat kita tentukan seperti pada balok tunggal biasa.
5. Garis pengaruh pada bagian balok rusuk Gerber di antara dua engsel, dapat kita tentukan seperti pada balok tunggal dengan konsole dan kemudian menghubungkan titik ujung garis pengaruh pada engsel dengan titik tumpuan berikut dengan ordinat $\eta = 0$ dengan garis lurus.
6. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan, pada gaya lintang dan pada momen lentur terdiri dari garis-garis yang lurus (pada semua konstruksi batang yang statis tertentu) dan selalu mengubah jurusan pada suatu titik engsel. Garis pengaruh kemudian mendapatkan pada semua tumpuan ordinat $\eta = 0$ kecuali pada tumpuan yang ditentukan dengan garis pengaruh pada reaksi tumpuan itu.

9. 3. 5. Contoh-contoh

Contoh 1: Pada suatu rel sebagai balok rusuk Gerber berjalan dua derek menurut gambar 9. 3. 5. a. berikut (tekanan derek dalam kurung menjadi beratnya derek sendiri). Dicari:

1. Reaksi tumpuan R_A, R_B dan R_C
2. Momen lentur pada pertengahan bagian A-B
3. Momen lentur pada pertengahan bagian engsel g-C
4. Momen tumpuan M_B
5. Gaya lintang pada tumpuan B



Gambar 9. 3. 5. a.

Penyelesaian:

1. Penentuan reaksi tumpuan R_A, R_B dan R_C:

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan masing-masing yang maksimal dan yang minimal dapat dilihat pada gambar 9. 3. 5. b. berikut.

Pada tumpuan A kita dapatkan nilai maksimal dan minimal seperti tergambar pada gambar 9. 3. 5. b. sebagai:

$R_{A\,max} = 10{,}0\,(1{,}075 + 0{,}842) + 14{,}0\,(0{,}741 + 0{,}475) = 36{,}2\,\text{t}$
$R_{A\,min} = 10{,}0\,(-0{,}100 - 0{,}333) + 14{,}0\,(-0{,}300 - 0{,}211) = -11{,}5\,\text{t}$

Pada tumpuan B kita dapatkan nilai maksimal dengan memasang dua derek ini pada tempat dengan ordinat η = maksimal dan kemudian dapat ditentukan:

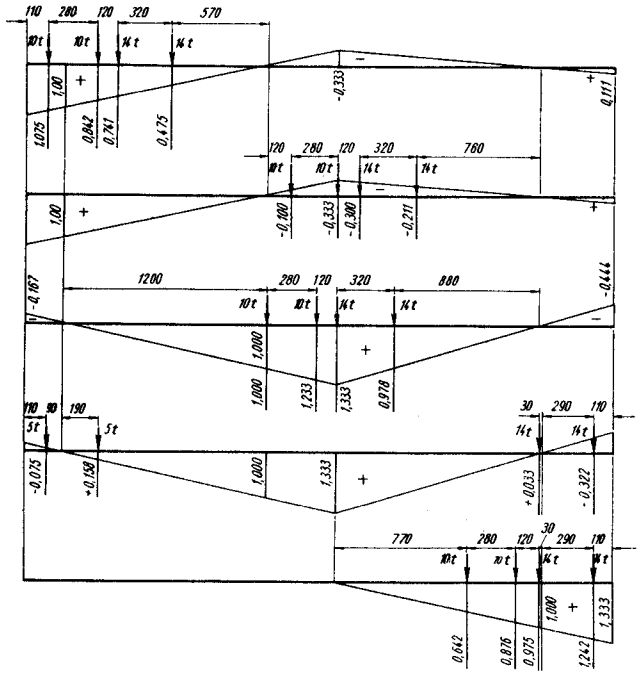
$R_{B\,max} = 10{,}0\,(1{,}000 + 1{,}233) + 14{,}0\,(1{,}333 + 0{,}987) = 54{,}7\,\text{t}$

Nilai minimal kita dapati dengan memasang derek pada bagian garis pengaruh yang negatif karena pada derek kiri satu roda masih berdiri pada bagian garis pengaruh yang positif (lihat gambar 9. 3. 5. b.), maka kita menentukan, bahwa derek itu menjadi kosong (tidak bekerja) dan yang diperhatikan hanya berat sendiri. Nilai minimal selanjutnya menjadi:

$R_{B\,min} = 5{,}0\,(-0{,}075 + 0{,}158) + 14{,}0\,(0{,}033 - 0{,}322) = -3{,}635\,\text{t}$

Pada tumpuan C kita hanya dapat menentukan nilai maksimal, karena tidak ada pengaruh yang negatif dan yang bisa menentukan nilai minimal. Selanjutnya nilai maksimal menjadi:

$R_{C\,max} = 10{,}0\,(0{,}642 + 0{,}876) + 14{,}0\,(0{,}975 + 1{,}242) = 46{,}2\,\text{t}$
$R_{C\,min} = 0$



Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A_{max}

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A_{min}

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan B_{max}

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan B_{min}

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan C_{max}

Gambar 9. 3. 5. b.

2. Penentuan momen lentur pada pertengahan bagian $A-B$:

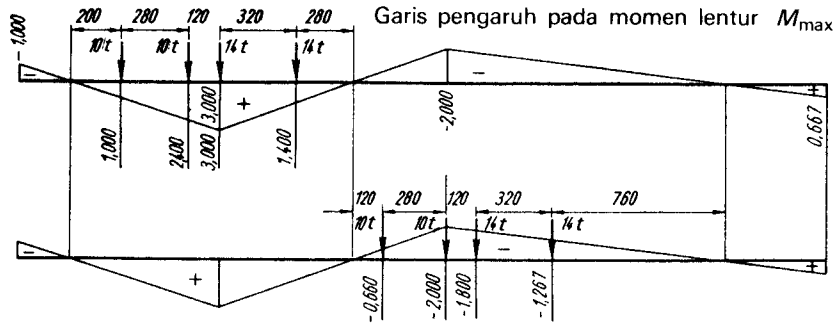
Kita menentukan ordinat η garis pengaruh pada titik potong di pertengahan bagian $A-B$ sebagai:

$$\eta = \frac{xx'}{l} = \frac{6{,}0 \cdot 6{,}0}{12{,}0} = 3{,}00$$

Kemudian dapat kita gambar garis pengaruh seperti terlihat pada gambar 9. 3. 5. c. berikut. Nilai-nilai $M_{\text{max A-B}}$ dan $M_{\text{min A-B}}$ kita dapat kita tentukan sebagai:

$M_{max\ A-B} = 10{,}0(1{,}000 + 2{,}400) + 14{,}0(3{,}000 + 1{,}400) = 95{,}6\,\text{tm}$

$M_{min\ A-B} = 10{,}0(-0{,}600 - 2{,}000) + 14{,}0(-1{,}800 - 1{,}267) = -69{,}0\,\text{tm}$



Garis pengaruh pada momen lentur $M_{\text{max A-B}}$

Gambar 9. 5. 3. c.

Garis pengaruh pada momen lentur $M_{\text{min A-B}}$

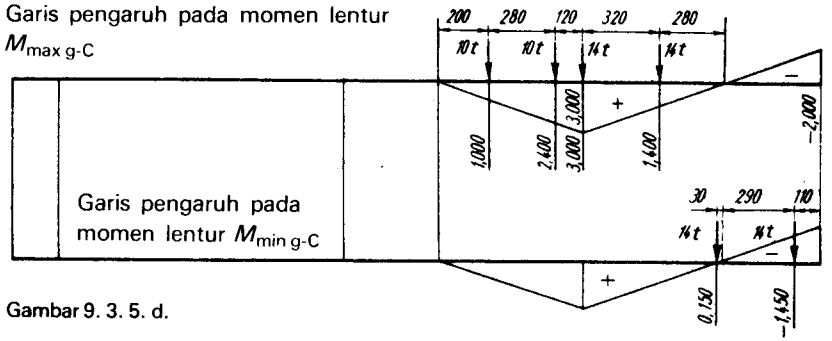
3. Penentuan momen lentur pada pertengahan bagian g-C:

Garis pengaruh dapat kita tentukan seperti pada titik 2. dan seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. d. berikut. Pada penentuan $M_{\text{min g-C}}$ kita mendorong satu derek ke bagian kiri yang tidak mempengaruhi bagian g-C. Kemudian dapat kita tentukan nilai $M_{\text{max g-C}}$ dan $M_{\text{min g-C}}$ seperti berikut:

$M_{max\ g-C} = 10{,}0(1{,}000 + 2{,}400) + 14{,}0(3{,}000 + 1{,}400) = 95{,}6\,\text{tm}$

$M_{min\ g-C} = 14{,}0(+0{,}150 - 1{,}450) = -18{,}2\,\text{tm}$

Garis pengaruh pada momen lentur $M_{\text{max g-C}}$



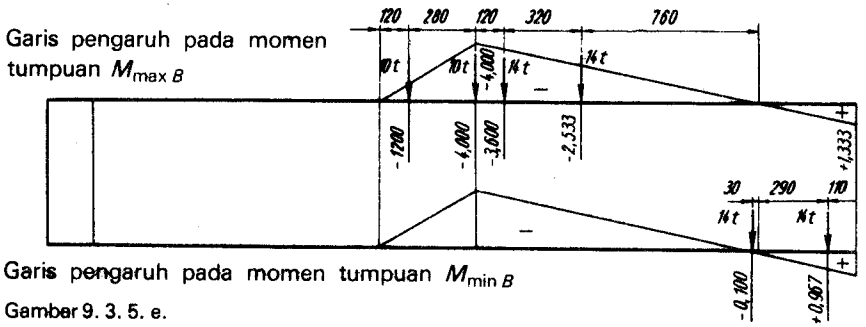
Gambar 9. 3. 5. d.

4. Penentuan momen tumpuan *B*:

Kita menggambar garis pengaruh pada momen tumpuan *B* pada bagian konsole sebelah kanan dari tumpuan *B*. Ujung konsole (engsel g) kita hubungkan dengan garis lurus dengan tumpuan *C* (η = O) dan sampai ujung konsole yang di sebelah kanan dari tumpuan *C*, seperti terlihat pada gambar 9. 3. 5. e. berikut. Nilai-nilai $M_{max\,B}$ dan $M_{min\,B}$ dapat kita tentukan sebagai:

$$M_{max\,B} = 10{,}0(-1{,}200-4{,}000) + 14{,}0(-3{,}600-2{,}533) = -137{,}8\ \text{tm}$$

$$M_{min\,B} = 14{,}0(-0{,}100 + 0{,}967) = 12{,}15\ \text{tm}$$



Gambar 9. 3. 5. e.

5. Penentuan gaya lintang pada tumpuan *B:*

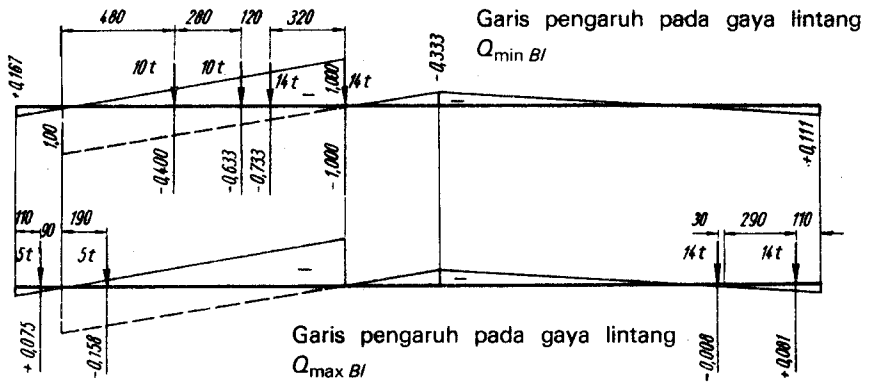
Karena pada titik potong yang kita perhatikan (titik tumpuan *B*) ada bekerja suatu gaya (reaksi tumpuan *B*); maka kita harus menggambar garis pengaruh pada gaya lintang sebelah kiri (*l*) dan sebelah kanan (*r*) dari tumpuan *B* itu seperti terlihat pada gambar 9. 3. 5. f. dan g., dan kemudian kita dapatkan nilai Q_{max} dan Q_{min} juga dengan nilai sebelah kiri (*l*) dan sebelah kanan (*r*) sebagai $Q_{max\,Bl}$, $Q_{max\,Br}$, $Q_{min\,Bl}$ dan $Q_{min\,,Br}$ seperti berikut:

$$Q_{min\ Bl} = 10{,}06\text{-}0{,}400-0{,}633) + 14{,}0(-0{,}733-1{,}000) = -34{,}6\ t$$

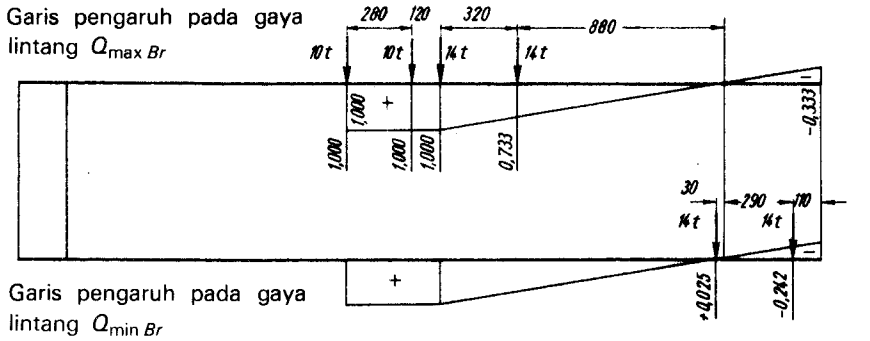
$$Q_{max\ Bl} = 5{,}0(+0{,}075-0{,}158) + 14{,}0(-0{,}088+0{,}081) = +0{,}6\ t$$

$$Q_{max\ Br} = 10{,}0(1{,}000+1{,}000) + 14{,}0(1{,}000+0{,}733) = +44{,}25\ t$$

$$Q_{min\ Br} = 14{,}0(+0{,}025-0{,}242) = -3{,}04\ t$$



Gambar 9. 3. 5. f.

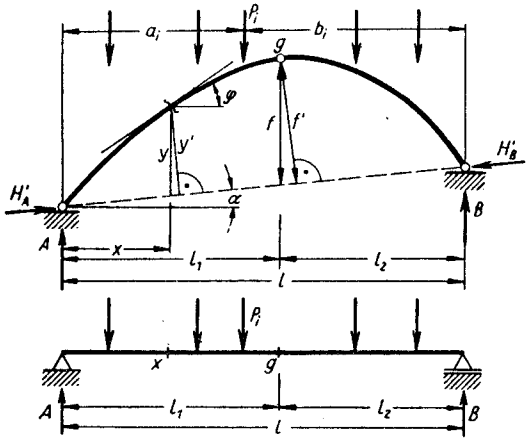


Gambar 9. 3. 5. g.

9.4. Garis pengaruh pada busur tiga ruas

9. 4. 1. Perhitungan dengan beban yang tetap

Sebagai dasar pada penentuan konstruksi busur tiga ruas dengan beban yang tetap kita perhatikan penentuan-penentuan bab 3. 7. 3. 2. (Konstruksi busur tiga ruas dengan gaya-gaya pada dua bagian busur), terutama penyelesaian secara analitis (lihat gambar 3. 7. 3. f. pada jilid satu buku ini).
Atas dasar ketentuan-ketentuan itu dapat juga kita tentukan garis pengaruh pada beban yang tetap.



Gambar 9. 4. 1. a.

Reaksi tumpuan R_A dan R_B dan kita bagi atas komponen 'horisontal' H'_A dan H'_B dan komponen vertikal, yaitu R_{Av} dan R_{Bv} menurut rumus berikut:

$$R_{Av} = \frac{1}{l}\,\Sigma P_i b_i \quad \text{dan} \quad R_{Bv} = \frac{1}{l}\,\Sigma P_i a_i$$

R_{Av} dan R_{Bv} menentukan juga reaksi tumpuan pada sistim dasar, yaitu suatu balok tunggal dengan lebar bentang l seperti terlihat pada gambar 9. 4. 1. a. di atas. Kemudian komponen horisontal H menjadi:

$$H = H_A = H_B = H'_A \cos\alpha = H'_B \cos\alpha = H' \cos\alpha = \frac{M_{0g}}{f}$$

Dengan M_{0g} sebagai momen lentur pada sistim dasar pada titik engsel g dan dengan f sebagai tingginya engsel dari garis penghubung tumpuan A dan tumpuan B. Momen lentur pada potongan sembarang x dapat kita tentukan sebagai:

$$M_x = M_{0x} - Hy$$

Dengan M_x sebagai momen pada titik x sembarang pada sistim dasar (lihat juga gambar 9. 4. 1. a.).
Pada penentuan gaya normal dan gaya lintang kita menggunakan rumus-rumus dan pengetahuan dari bab 3. 7. 3. 2. dan menentukan pada potongan x sembarang:

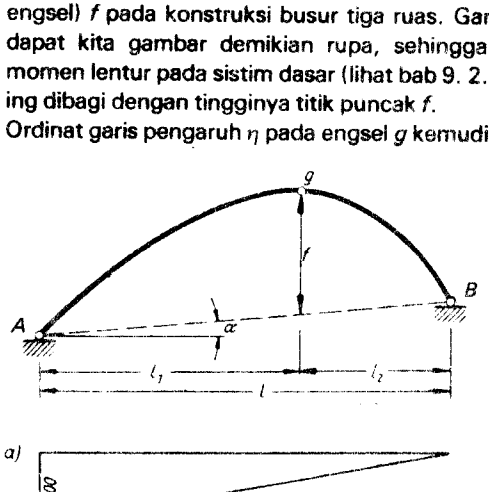
$$-N_x = \Sigma V_l \sin\varphi + \Sigma H_l \cos\varphi \qquad (9.5.)$$

$$Q_x = \Sigma V_l \cos\varphi - \Sigma H_l \sin\varphi \qquad (9.6.)$$

Dengan V_l sebagai resultante semua gaya yang vertikal pada bagian konstruksi busur tiga ruas yang sebelah kiri dari potongan sembarang x. V menjadi positif jikalau berjurusan ke atas.
H_l menjadi resultante semua gaya yang horisontal pada bagian konstruksi busur tiga ruas yang sebelah kiri dari potongan sembarang x. H menjadi positif jikalau berjurusan ke kanan.
Rumus (9. 5.) dan rumus (9. 6.) hanya dapat digunakan pada konstruksi busur tiga ruas dengan beban yang tetap.

9. 4. 2. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan

Pada beban tetap reaksi tumpuan R_{Av} dan R_{Bv} menjadi sama pada konstruksi busur tiga ruas dan pada sistim dasar (balok tunggal dengan lebar bentang $= l$). Oleh karena itu garis pengaruh pada reaksi tumpuan yang vertikal harus menjadi sama seperti pada garis pengaruh pada reaksi tumpuan pada balok tunggal (lihat gambar 9. 4. 2. a. dan b.).
Komponen horisontal H pada beban yang tetap dapat kita tentukan dengan momen pada engsel pada sistim dasar, yang dibagi dengan tingginya titik puncak (dan engsel) f pada konstruksi busur tiga ruas. Garis pengaruh komponen horisontal H dapat kita gambar demikian rupa, sehingga kita gambar garis pengaruh pada momen lentur pada sistim dasar (lihat bab 9. 2. 3.) dengan ordinatnya masing- masing dibagi dengan tingginya titik puncak f.
Ordinat garis pengaruh η pada engsel g kemudian menjadi: $\eta_g = \frac{l_1 l_2}{lf}$



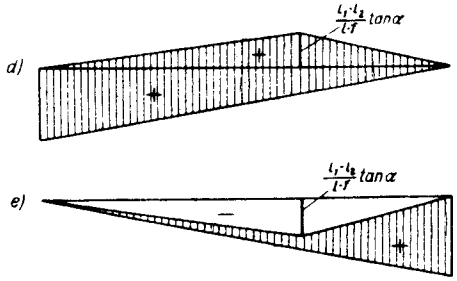
(lihat juga gambar 9. 4. 2. c.).

Gambar 9. 4. 2. a. s/d c.

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan R_{Av}

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan R_{Bv}

Garis pengaruh oleh komponen horisontal H



Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan B

Gambar 9. 4. 2. d. dan e.

Penentuan garis pengaruh pada reaksi tumpuan A dan B dapat kemudian kita lakukan dengan superposisi garis pengaruh pada reaksi tumpuan R_{Av} atau R_{Bv} dengan garis pengaruh oleh komponen horisontal H seperti terlihat pada gambar 9. 4. 2. d. dan e. di atas.
Jikalau tumpuan A dan B tidak berada dalam satu dataran maka kita harus memperhatikan pengaruh sudut α. Atau dengan kata-kata lain garis pengaruh oleh komponen horisontal H harus dikalikan dengan tan α sebelum di-superposisi-kan menurut gambar 9. 4. 2. d. dan e. di atas.

9. 4. 3. Garis pengaruh pada momen lentur

Pada penentuan garis pengaruh pada momen lentur dengan beban tetap kita perhatikan rumus berikut:

$$M_x = M_{0x} - Hy$$

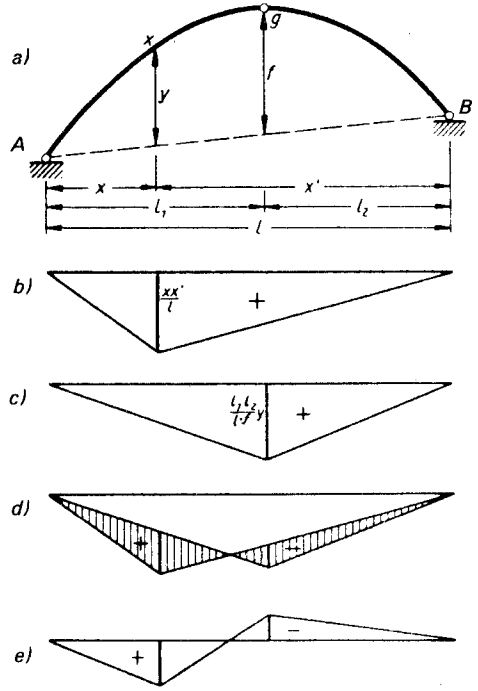
Seperti pada garis pengaruh pada reaksi tumpuan, garis pengaruh pada momen lentur terdiri dari suatu kombinasi dua garis pengaruh yang sudah kita ketahui. Garis pengaruh pertama ialah garis pengaruh pada momen lentur pada suatu titik sembarang x pada sistim dasar (lihat juga bab 9. 2. 3.) dengan ordinatnya:

$$\eta = \frac{xx'}{l}$$

garis pengaruh kedua ialah garis pengaruh oleh komponen horisontal H yang negatif dan yang dikalikan dengan ukuran y. Y ialah tingginya busur pada titik sembarang x (lihat gambar 9. 4. 3. a. berikut). Ordinat η_g di bawah titik engsel g kemudian menjadi:

$$\eta = \frac{l_1 l_2}{lf} y$$

Jikalau kita men-superposisi-kan dua garis pengaruh ini kita dapatkan garis pengaruh pada momen lentur seperti terlihat pada gambar 9. 4. 3. d. berikut (bidang yang diarsir). Boleh juga menggambar garis pengaruh pada momen lentur ini seperti terlihat pada gambar 9. 4. 3. e. berikut.



Gambar 9. 4. 3. a. s/d e.

Garis pengaruh pada momen lentur M_{0x}

Garis pengaruh oleh komponen horisontal H yang dikalikan dengan ukuran y

Garis pengaruh pada momen lentur M_x yang di-superposisikan

Garis pengaruh pada momen lentur M_x yang di-superposisikan

9. 4. 4. Garis pengaruh pada gaya normal dan gaya lintang

Kita memperhatikan rumus (9. 5.) gaya normal pada titik x pada konstruksi busur tiga ruas dengan beban tetap yang berbunyi:

$$-N_x = \Sigma V_l \sin\varphi + \Sigma H_l \cos\varphi$$

Karena sebenarnya $H_l = H$ dapat kita tulis:

$$-N_x = (R_A - \Sigma P_{il}) \sin\varphi + H\cos\varphi$$

Menurut bab 9. 4. 2. dapat kita tentukan, bahwa

$$R_A = R_{Av} + H\tan\alpha$$

dan kemudian:

$$-N_x = (R_{Av} + H\tan\alpha - \Sigma P_{il}) \sin\varphi + H\cos\varphi$$

Pada rumus ini $R_{Av} - \Sigma P_{il}$ menjadi gaya lintang Q_{0x} pada suatu balok tunggal dengan lebar bentang = l pada titik sembarang x:

$$- N_x = Q_{0x} \sin\varphi + H \tan\alpha \sin\varphi + H \cos\varphi$$

$$- N_x = Q_{0x} \sin\varphi + \frac{H}{\cos\alpha} (\sin\alpha \sin\varphi + \cos\alpha \cos\varphi)$$

$$\boxed{- N_x = Q_{0x} \sin\varphi + H \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}} \qquad (9.7.)$$

Penentuan gaya lintang atas dasar rumus (9. 6.) pada titik x sembarang pada konstruksi busur tiga ruas dengan beban tetap kita lakukan demikian rupa, sehingga:

$$Q_x = \Sigma V_l \cos\varphi - \Sigma H_l \sin\varphi$$

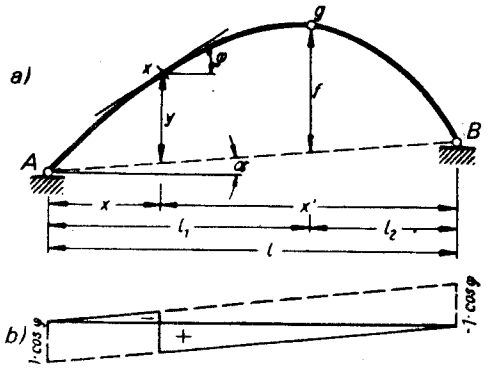
$$Q_x = Q_{0x} \cos\varphi + H \tan\alpha \cos\varphi - H \sin\varphi$$

$$Q_x = Q_{0x} \cos\varphi - \frac{H}{\cos\alpha} (\sin\varphi \cos\alpha - \cos\varphi \sin\alpha)$$

$$\boxed{Q_x = Q_{0x} \cos\varphi - H \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}} \qquad (9.8.)$$

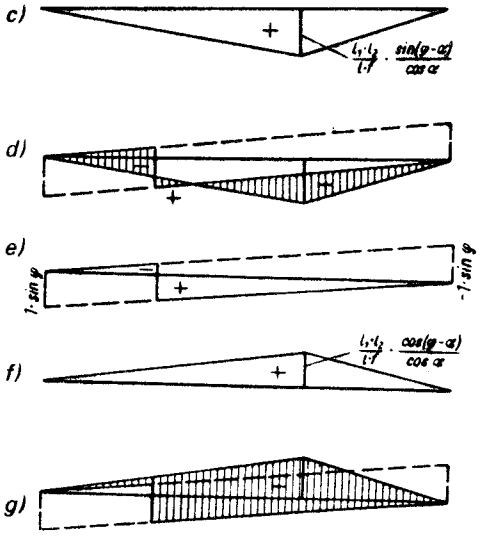
Jikalau tumpuan A dan B berada dalam satu dataran, maka $\alpha = 0$.
Rumus (9. 7.) dan rumus (9. 8.) dapat kita tulis seperti berikut:

$$\boxed{\begin{aligned} - N_x &= Q_{0x} \sin\varphi + H \cos\varphi \\ Q_x &= Q_{0x} \cos\varphi - H \sin\varphi \end{aligned}}$$



Gambar 9. 4. 4. a. dan b.

Garis pengaruh pada gaya lintang Q_{0x} yang dikalikan dengan cos φ



Garis pengaruh oleh komponen horisontal H yang dikalikan dengan faktor $\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}$

Garis pengaruh pada gaya lintang Q_x yang di-superposisikan

Garis pengaruh pada gaya lintang Q_{ox} yang dikalikan dengan sin φ

Garis pengaruh oleh komponen horisontal H yang dikalikan dengan faktor $\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}$

Garis pengaruh pada gaya normal N_x yang di-superposisi-kan

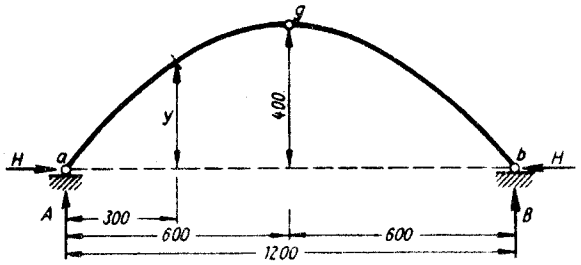
Gambar 9. 4. 4. c. s/d g.

9. 4. 5. Ringkasan

Penentuan garis pengaruh pada konstruksi busur tiga ruas berdasarkan rumus-rumus penentuan reaksi tumpuan, momen lentur, gaya normal dan gaya lintang pada konstruksi busur tiga ruas dengan beban tetap.
Kita dapat menggambar garis pengaruh pada konstruksi busur tiga ruas selalu dengan men-superposisi-kan dua komponen dengan garis pengaruhnya yang dikalikan dengan satu faktor.

9.4.6. Contoh

Suatu konstruksi busur tiga ruas yang berbentuk parabol menurut gambar 9. 4. 6. a. berikut. Dengan bantuan garis pengaruh masing-masing kita cari: reaksi tumpuan, momen lentur, gaya lintang dan gaya normal pada titik x oleh berat sendiri g = 1.0 t/m dan beban q = 3.0 t/m.



Gambar 9. 4. 6. a. .

Penyelesaian:
Penentuan nilai y dan φ menurut ilmu ukur:

$l = 12{,}00$ m $f = 4{,}00$ m $x = 3{,}00$m $x' = 9{,}00$ m

$l_1 = l_2 = 6{,}00$ m

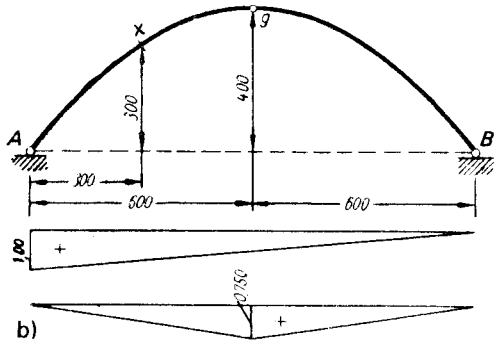
menurut persamaan parabol dapat kita tentukan:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) = \frac{4.4{,}00}{144} 3{,}0.9{,}0 = 3{,}00 \text{ m}$$

$$y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{4.4{,}00}{144} (12{,}0 - 2.3{,}0) = 0{,}667$$

$\tan \varphi = 0{,}667$ $\varphi = 33{,}7°$ $\sin \varphi = 0{,}555$ $\cos \varphi = 0{,}832$

Penentuan garis pengaruh masing-masing:

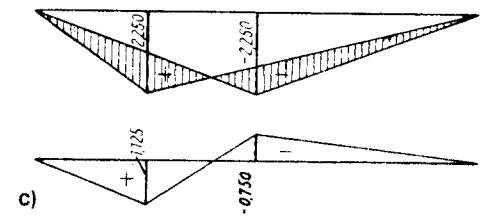


Gambar 9. 4. 6. b. dan c.

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan R_A dengan $\eta_a = 1{,}00$

Garis pengaruh oleh komponen horisontal H dengan

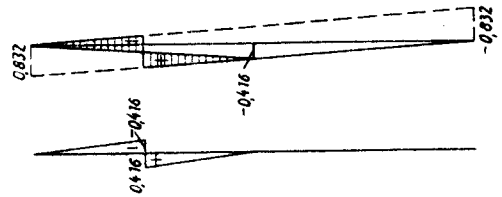
$$\eta_g = \frac{l_1 l_2}{lf} = \frac{6{,}0.6{,}0}{12{,}0.4{,}0} = 0{,}750$$



Garis pengaruh pada momen lentur
$M_x = M_{ox} - H.y$ pada $x = 3.0$ m

$$\eta_{ox} = \frac{xx'}{l} = \frac{3{,}0.9{,}0}{12{,}0} = 2{,}250$$

$$\eta_g = \frac{l_1 l_2}{lf} y = 0{,}750.3{,}00 = 2{,}250$$

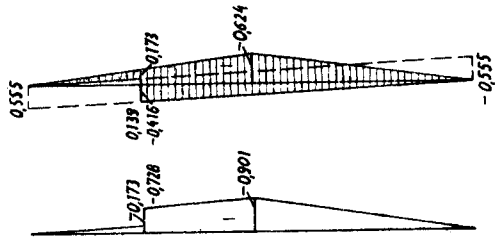


Gambar 9. 4. 6. d.

Garis pengaruh pada gaya lintang

$Q_x = Q_{0x} \cos \varphi - H \sin \varphi$ pada $x = 3.00$ m

oleh $Q_{0x} \cos \varphi \rightarrow \eta_a = 1{,}0 \cos \varphi = 0{,}832$
oleh $H \sin \varphi \rightarrow \eta_g = 0{,}750.0{,}555 = 0{,}416$



Gambar 9. 4. 6. e.

Garis pengaruh pada gaya normal

$-N_x = Q_{0x} \sin \varphi + H \cos \varphi$ pada x = 3.0 m

oleh $Q_{0x} \sin \varphi \rightarrow \eta_a = 1{,}0 \sin \varphi = 0{,}555$
oleh $H \cos \varphi \rightarrow H_g = 0{,}750.0{,}832 = 0{,}624$

Hasil oleh penentuan garis pengaruh:
Pada reaksi tumpuan masing-masing:

$$R_{A\,max} = \frac{1}{2} 1{,}0.12{,}0 (1{,}0 + 3{,}0) = 24{,}0 \text{ t}$$

$$H_{max} = \frac{1}{2} 0{,}75.12{,}0 (1{,}0 + 3{,}0) = 18{,}0 \text{ t}$$

Pada momen lentur:
Titik dengan momen nol kita dapatkan pada titik 4.80 m dari tumpuan A menurut gambar 9. 4. 6. c. di atas. Luasnya bidang momen yang negatif dan yang positif selanjutnya menjadi:

$$F_+ = \frac{1}{2} 4{,}80.125 = +2{,}70$$

$$F_{-} = \frac{1}{2}\ 7{,}20.0{,}750 = -2{,}70$$

$$F = F_{+} + F_{-} = 0$$

Karena beban oleh berat sendiri selalu ada pada seluruh konstruksi busur tiga ruas yang pada contoh ini menjadi simetris dengan garis $A-B$ yang horisontal dapat kita tentukan: $M_g = 0$.
Untuk menentukan nilai batasan pada momen lentur oleh beban q kita membebani hanya bagian dengan bidang pengaruh yang positif atau yang negatif, yaitu:

$$M_{p\,max} = +2{,}70.3{,}00 = 8{,}10\ \text{tm}$$

$$M_{p\,min} = -2{,}70.3.00 = -8{,}10\ \text{tm}$$

Pada gaya lintang:

$$Q_g = 0$$

$$Q_{p\,max} = \frac{1}{2}\ 0{,}416.3{,}0.3{,}0 = 1{,}87\ \text{t}$$

$$Q_{p|min|} = -1{,}87\ \text{t}$$

Pada gaya normal:

$$N_g = -1{,}0\left[\frac{1}{2}\,12{,}0.0{,}624 - \frac{1}{2}\,3{,}0.0{,}139 + \frac{1}{2}\,9{,}0.0416\right]$$

$$N_g = -1{,}0.5408 = -5{,}408\ \text{t}$$

$$M_{p\,min} = -3{,}0.5{,}408 = -16{,}224\ \text{t} \qquad N_{p\,max} = 0$$

$$N_{min} = -21{,}63\ \text{t}$$

9. 5. Garis pengaruh pada konstruksi rangka batang

9. 5. 1. Pengetahuan dasar

Tidak mungkin dalam bab ini kita memperhatikan semua kemungkinan mengenai garis-garis pengaruh pada konstruksi rangka batang yang statis tertentu. Kita akan membatasi diri pada beberapa macam konstruksi rangka batang yang penting. Ketentuan-ketentuan pada konstruksi rangka batang itu juga dapat digunakan pada konstruksi rangka batang yang lain.
Reaksi tumpuan pada suatu konstruksi rangka batng biasa menjadi sama seperti pada suatu balok tunggal dengan lebar bentang yang sama. Oleh karena itu juga garis pengaruh menjadi sama dan kita mengabaikan konstruksi garis pengaruh pada reaksi tumpuan pada konstruksi rangka batang selanjutnya.
Pada penentuan garis pengaruh pada gaya batang kita menggunakan persamaan pada beban yang tetap yang telah kita pelajari pada bab 4. 3. 3. (Perhitungan gaya

batang menurut A. Ritter). Persamaan-persamaan itu memperlihatkan, bahwa gaya batang dapat ditentukan dengan momen lentur dan gaya lintang pada suatu sistim dasar (balok tunggal) dengan suatu faktor menurut bentuk konstruksi rangka batang masing-masing. Karena itu garis pengaruh pada gaya batang (tanpa faktor-faktor itu) biasanya menjadi sama seperti garis pengaruh pada gaya lintang dan momen lentur pada balok tunggal. Kadang-kadang garis pengaruh harus di-superposisi-kan seperti pada konstruksi busur tiga ruas.
Pada dasar-dasar konstruksi rangka batang telah kita tentukan, bahwa gaya-gaya hanya dapat bekerja pada titik simpul masing-masing. Jikalau kemudian timbul gaya-gaya yang bekerja antara dua titik simpul, kita harus memperhatikan pengetahuan tentang beban yang tidak langsung (lihat bab 9. 2. 4.).
Pada penentuan garis pengaruh pada konstruksi rangka batang harus kita perhatikan batang tepi yang menerima beban. Pada umumnya batang tepi itu ditandai dengan garis putus.

9. 5. 2. Konstruksi rangka batang dengan batang tepi sejajar

Persamaan gaya batang pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi sejajar menurut pengetahuan dasar A. Ritter (lihat bab 4. 3. 3.) dapat kita tentukan:
Pada batang tepi atas (O) dan bawah (U):

$$U = +\frac{M_o}{h} \qquad O = -\frac{M_u}{h} \tag{9. 9.}$$

Pada batang diagonal (D):

$$D = \pm\frac{Q}{\sin\varphi} \tag{9. 10.}$$

Pada batang vertikal (V):

$$V = \pm P \text{ atau } V = 0 \text{ atau } V = \pm Q \tag{9. 11.}$$

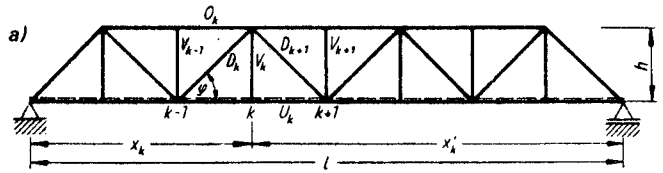
Garis pengaruh pada gaya batang tepi dapat kita gambar dengan penentuan garis pengaruh pada momen lentur pada sistim dasar (balok tunggal) dengan ordinatnya η yang dibagi atas ketinggian h konstruksi rangka batang itu (lihat juga gambar 9. 5. 2. a. s/d c.).

Garis pengaruh pada gaya batang diagonal dapat kita gambar dengan penentuan garis pengaruh pada gaya lintang pada sistim dasar dengan ordinatnya η yang

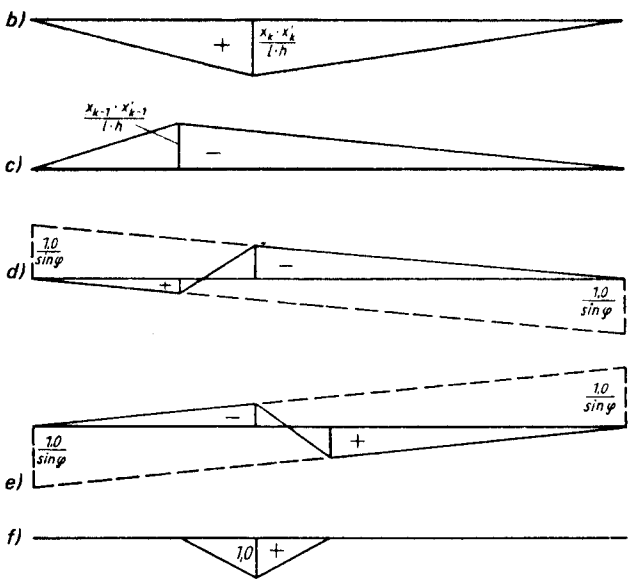
dibagi atas sin φ (dengan φ sebagai miringnya diagonal menurut gambar 9. 5. 2. a., d. dan e.) $\eta = 1.0$ menjadi $\eta = 1/\sin\varphi$.

Garis pengaruh pada gaya batang vertikal tergantung pada cara pemasangan diagonal sebelah kiri dan sebelah kanan. Bisa garis pengaruh pada gaya batang vertikal seluas satu bagian sebelah kiri dan sebelah kanan dari titik simpul yang diperhatikan, atau menjadi nol (lihat juga gambar 9. 5. 2. a. dan f.), atau garis pengaruh pada gaya batang vertikal menjadi sama dengan garis pengaruh pada gaya lintang (lihat juga gambar 9. 5. 2. g., l. dan m. berikut).

Sebagai keterangan kita perhatikan pertama suatu konstruksi rangka batang dengan batang tepi sejajar dengan diagonal yang turun naik seperti terlihat pada gambar 9. 5. 2. a. berikut:



Gambar 9. 5. 2. a. s/d f.



Garis pengaruh pada gaya batang tepi bawah U_k

Garis pengaruh pada gaya batang tepi atas O_k

Garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_k

Garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_{k+1}

Garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_k

Garis pengaruh pada gaya batang tepi dapat kita gambar menurut ketentuan tadi (lihat gambar 9. 5. 2. b. dan c.). Karena titik k yang kita perhatikan menjadi juga suatu titik simpul, garis pengaruh menjadi suatu garis lurus sebelah kiri dan sebelah kanan dari titik k itu. Tanda (+, −) pada garis pengaruh pada gaya batang tepi menentukan juga tanda gaya batang masing-masing.

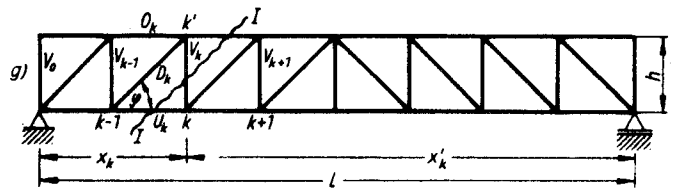
Pada garis pengaruh pada gaya batang diagonal kita pertama menentukan garis pengaruh pada gaya lintang dengan ordinat $\eta = 1/\sin\varphi$.

Dua titik ujung diagonal yang diperhatikan kita hubungkan dengan dua garis pengaruh itu (lihat gambar 9. 5. 2. d. dan e. di atas). Pada penentuan garis pengaruh pada konstruksi rangka batang dengan beban yang tidak langsung kita perhatikan rumus (9. 3.) dan rumus (9. 4.). Tanda (+, −) pada garis pengaruh pada gaya batang diagonal menentukan juga tanda gaya batang masing-masing.

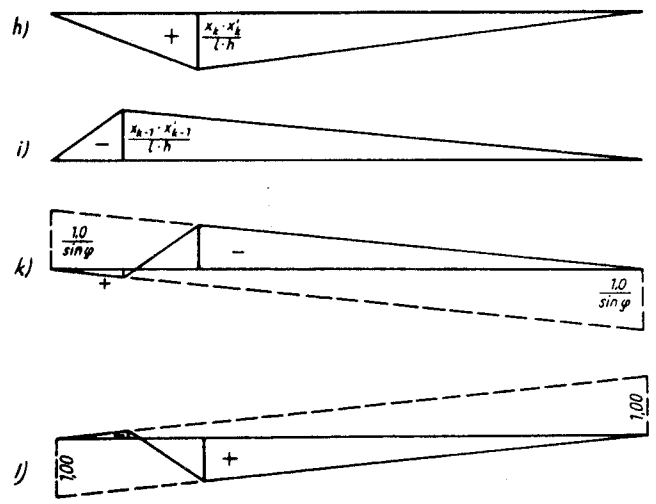
Pada penentuan garis pengaruh pada gaya batang vertikal kita pasang ordinat $\eta = 1.0$ di bawah batang vertikal itu (lihat juga gambar 9. 5. 2. f. di atas). Jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja pada suatu titik simpul pada samping batang vertikal V_k yang kita perhatikan, maka tidak ada gaya batang dan karena itu ordinat $\eta = 0$.

Pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi bawah yang dibebani seperti misalnya dapat dilihat pada gambar 9. 5. 2. a. di atas batang vertikal V_{k-1} dan V_{k+1} menjadi batang **tanpa gaya** (batang nol) dan karena itu juga ordinat garis pengaruh $\eta = 0$.

Sebagai kemungkinan kedua kita perhatikan suatu konstruksi rangka batang dengan diagonalnya naik (atau turun) semuanya, menurut gambar 9. 5. 2. g. berikut:



Gambar 9. 5. 2. g. s/d l.

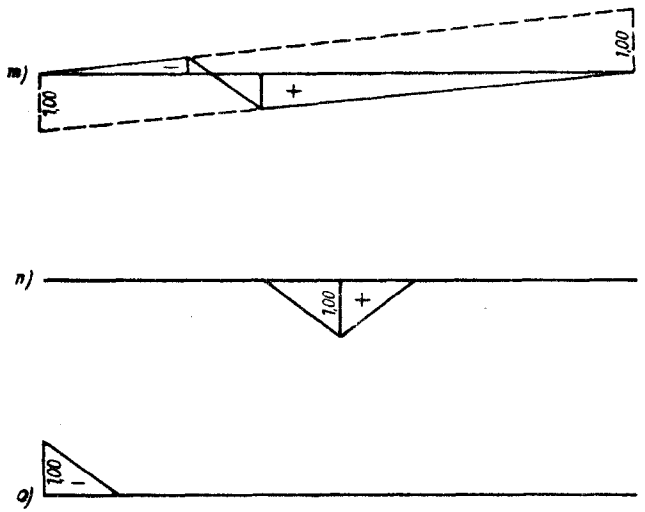


Garis pengaruh pada gaya batang tepi bawah V_k

Garis pengaruh pada gaya batang tepi atas O_k

Garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_k

Garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_k dengan batang tepi bawah yang menerima beban atau pada V_{k-1} dengan batang tepi atas yang menerima beban



Gambar 9. 5. 2. m. s/d o.

Garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_k dengan batang tepi atas yang menerima beban atau pada V_{k+1} dengan batang tepi bawah yang menerima beban

Garis pengaruh pada gaya batang V_{k+2} dengan batang tepi bawah yang menerima beban

Garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_o dengan batang tepi atas yang menerima beban

Penentuan garis pengaruh pada batang tepi dan pada gaya batang diagonal menurut gambar 9. 5. 2. h. s/d k. di atas tidak mengalami kesulitan dan dapat dilakukan seperti pada contoh konstruksi rangka batang dengan diagonal yang turun naik pada gambar 9. 5. 2. a. dsb.

Penentuan garis pengaruh pada gaya batang vertikal harus seimbang dengan gaya lintang Q seperti ditentukan pada rumus (9. 11.). Batang vertikal V sekarang berdiri pada suatu titik simpul yang juga menerima beban. Pada titik itu gaya lintang Q juga mengubah nilainya. Timbul sekarang pertanyaan apakah nilai gaya lintang sebelah kiri atau sebelah kanan dari titik itu berpengaruh. Jawaban pertanyaan ini pada konstruksi rangka batang dengan semua diagonal turun atau naik menjadi penting sekali dan hanya mungkin jikalau batang tepi yang menerima beban sudah ditentukan.

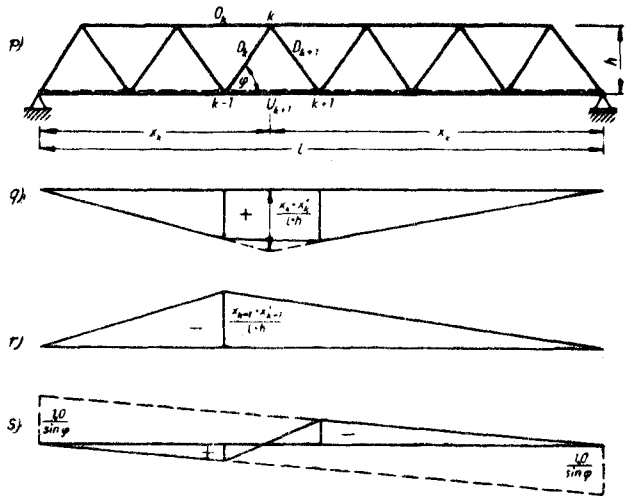
Pada penentuan kita perhatikan potongan I-I menurut A. Ritter seperti digambar pada gambar 9. 5. 2. g. di atas. Potongan I-I itu kena batang vertikal V_k. Gaya lintang yang berpengaruh ada pada bagian yang potongannya I-I dikenai batang tepi yang menerima beban.

Jikalau batang tepi yang menerima beban menjadi batang tepi bawah, maka garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_k dapat dilihat pada gambar 9. 5. 2. 1. di atas. Garis pengaruh ini menjadi sama dengan garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_{k-1} pada batang tepi atas yang menerima beban.

Pada kejadian yang berlawanan kita perhatikan gambar 9. 5. 2. m. Pada batang vertikal V_{k+2} yang di tengah-tengah konstruksi rangka batang ini kita perhatikan ketentuan-ketentuan pada konstruksi rangka batang dengan diagonal yang naik turun dan mendapat hsil seperti terlihat pada gambar 9. 5. 2. n. Pendapatan yang

sama timbul pada ujung masing-masing pada konstruksi rangka batang ini yang dapat kita lihat pada gambar 9. 5. 2. o. di atas.

Sebagai kemungkinan ketiga perhatikan suatu konstruksi rangka batang dengan batang tepi sejajar dan dengan diagonal saja seperti terlihat pada gambar 9. 5. 2. p. berikut:



Gambar 9. 5. 2. p. s/d s.

Garis pengaruh pada gaya batang tepi bawah U_k dengan pengaruh beban yang tidak langsung

Garis pengaruh pada gaya batang tepi atas O_k

Garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_k

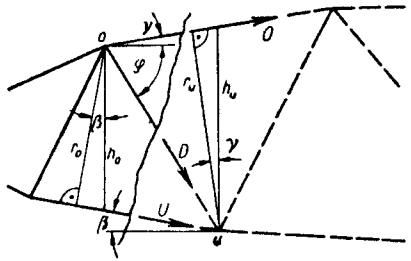
Pada penentuan garis pengaruh pada batang tepi bawah pada konstruksi rangka batang ini harus diperhatikan pengaruh oleh beban yang tidak langsung, seperti dibicarakan pada bab 9. 2. 4. Atas dasar ketentuan itu garis pengaruh antara titik simpul k − 1 dan k + 1 harus menjadi garis lurus, seperti terlihat pada gambar 9. 5. 2. q. di atas.

Pada penentuan garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_k kita juga menghubungkan dengan garis lurus suatu bagian yang ada antara dua titik simpul pada batang tepi bawah. Karena itu garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_{k+1} menjadi sama dengan tanda (+ , −) berlawanan.

9. 5. 3. Konstruksi rangka batang dengan batang tepi tidak sejajar

Penentuan garis-garis pengaruh pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi tidak sejajar berdasarkan atas persamaan-persamaan penentuan gaya batang oleh beban yang vertikal dan yang tetap (mati).

Kemudian kita perhatikan suatu bagian konstruksi rangka batang dengan batang tepi tidak sejajar seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. a. berikut. Bagian konstruksi rangka batang kita potong menurut potongan yang ditentukan dalam gambar 9. 5. 3. a. dan perhatikan bagian sebelah kiri potongan itu.



Gambar 9. 5. 3. a.

Kita tentukan gaya batang tepi dengan syarat keseimbangan $\Sigma M = 0$ dan sebagai titik kutub kita pilih titik potong dua gaya batang yang lain seperti telah ditentukan pada bab 4. 3. 3. Jumlah momen semua gaya luar selanjutnya kita tentukan sebagai M dengan index $_o$ pada batang tepi atas dan dengan index $_u$ pada batang tepi bawah.
Kita dapat menentukan:

$$M_o - Ur_o = 0 \qquad M_u + Or_u = 0$$

r_o dan r_u dapat kita tukar dengan:

$$r_o = h_o \cos\beta \qquad r_u = h_u \cos\gamma$$

kemudian persamaan pada gaya batang tepi dapat ditulis demikian rupa, sehingga:

$$U = + \frac{M_o}{r_o} = \frac{M_o}{h_o \cos\beta} \qquad O = - \frac{M_u}{r_u} = - \frac{M_u}{h_u \cos\gamma} \tag{9.12.}$$

Jikalau kita sekarang membandingkan rumus (9. 12.) ini dengan rumus (9. 9) kita melihat, bahwa sebetulnya kita hanya mengganti ketinggian konstruksi rangka batang h dengan jarak yang siku-siku r antara titik simpul (kutub) dan batang tepi berhadapan. Sebetulnya rumus (9. 9.) menjadi suatu bentuk khusus pada rumus (9. 12.) dengan $\beta = 0, \gamma = 0$ dan $r = h$.
Atas dasar pengetahuan ini dapat kita tentukan, bahwa penentuan gaya batang tepi pada konstruksi rangka batang dengan tepi yang sejajar dan dengan tepi yang tidak sejajar menjadi sama, hanya dengan memperhatikan jarak r yang menggantikan ketinggian konstruksi rangka batang h.
Gaya batang diagonal dapat kita tentukan dengan syarat keseimbangan $\Sigma H = 0$ dengan hasil seperti berikut:

$$D \cos\varphi + U \cos\beta + O \cos\gamma = 0$$

menurut rumus (9. 12.) dapat kita tentukan:

$$U \cos\beta = \frac{M_o}{h_o} \quad \text{dan} \quad O \cos\gamma = - \frac{M_u}{h_u}$$

dan kemudian kita dapatkan:

$$D \cos\gamma + \frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u} = 0$$

$$D = \frac{1}{\cos\varphi} \left(\frac{M_u}{h_u} - \frac{M_o}{h_o} \right) \tag{9.13.}$$

Atas dasar rumus (9. 13.) kita lihat, bahwa garis pengaruh pada gaya batang diagonal menjadi suatu superposisi atas dua garis pengaruh yang sudah diketahui seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. e. berikut.
Karena penentuan dan gambaran garis pengaruh ini menjadi agak rumit, maka dapat kita hitung gaya batang diagonal dengan cara lain juga.
Kita memperhatikan gambar 9. 5. 3. b. berikut dengan potongan yang telah ditentukan. Dengan titik potong i bagi dua batang tepi konstruksi rangka batang ini sebagai titik kutub kita menentukan syarat keseimbangan $\Sigma M_i = 0$.
Jikalau sekarang suatu gaya $P = 1.0$ membebani bagian konstruksi rangka batang yang sebelah kanan dari potongan kita dapat menentukan syarat keseimbangan pada bagian kiri (tanpa beban) konstruksi rangka batang ini sebagai:

$$- R_A a_k = D_k \cdot r_{dk} = 0 \qquad D_k = - R_A \frac{a_k}{r_{dk}}$$

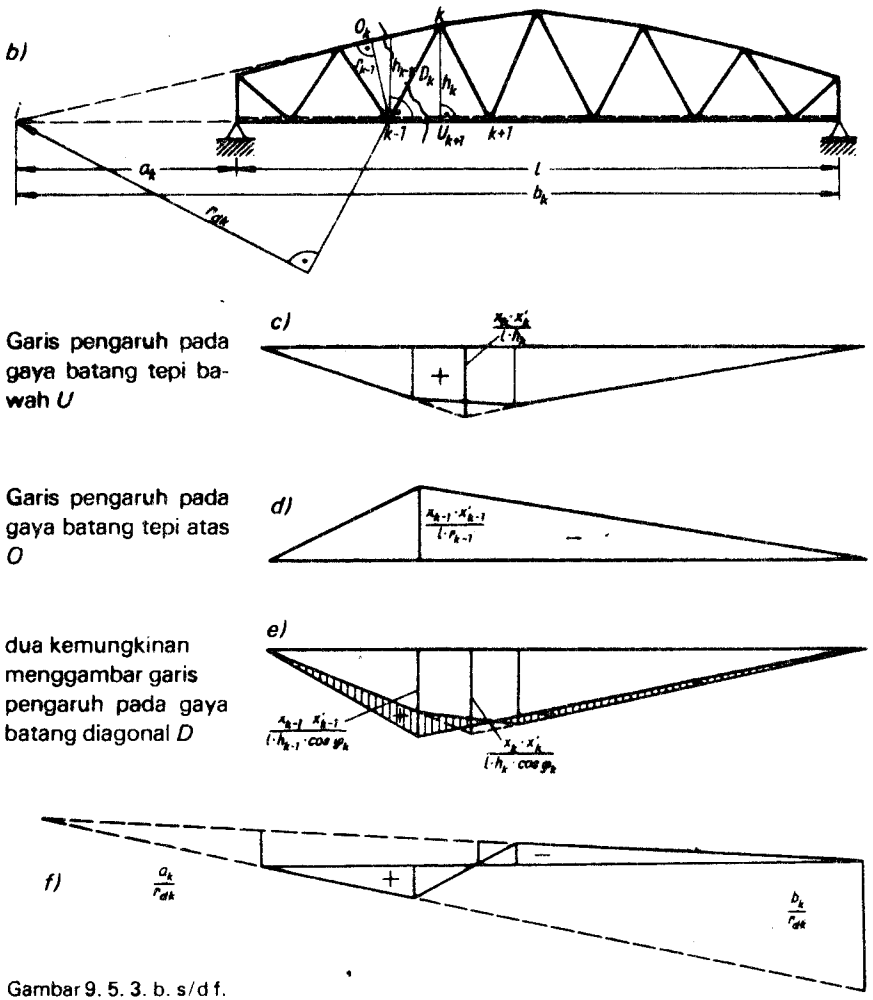
Garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_k pada bagian kanan konstruksi rangka batang ini sebenarnya menjadi garis pengaruh pada reaksi tumpuan R_A yang negatif dan yang dikalikan dengan a_k/r_{dk}.
Jikalau gaya $P = 1.0$ membebani bagian konstruksi rangka batang yang sebelah kiri potongan, maka kita dapat menentukan persamaan pada bagian kanan (tanpa beban) dari konstruksi rangka batang ini sebagai:

$$- R_B b_k + D r_{dk} = 0 \qquad D_k = + R_B \frac{b_k}{r_{dk}}$$

yang menjadi garis pengaruh pada reaksi tumpuan R_B yang dikalikan dengan b_k/r_{dk}, seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. f. berikut. Pada bagian beban yang tidak langsung kita hubungkan garis pengaruh dengan suatu garis lurus.
Konstruksi garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_k dapat diperiksa karena dua garis miring dari garis pengaruh harus mempunyai titik potong pada titik kutub i dengan bukti seperti berikut:

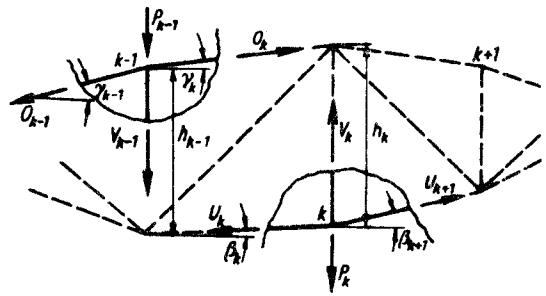
$$\frac{a_k}{r_{dk}} : a_k = \frac{b_k}{r_{dk}} : b_k$$

Sedang persamaan penentuan gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi sejajar berbeda menurut bentuk diagonalnya maka penentuan gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi tidak sejajar menjadi lebih rumit lagi. Biasanya gaya batang vertikal hanya dapat ditentukan dengan suatu potongan lingkaran, keliling titik simpul yang diperhatikan, seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. g. berikut. Persamaan penentuan gaya batang vertikal terdiri dari beberapa bagian yang berarti, bahwa garis pengaruhnya kita dapatkan dengan superposisi.



Gambar 9. 5. 3. b. s/d f.

Pada penentuan gaya batang yang vertikal, sebagai keterangan kita perhatikan pertama suatu konstruksi rangka batang dengan diagonal yang turun naik menurut Gambar 9. 5. 3. g. berikut:



Gambar 9. 5. 3. g.

Menurut persamaan keseimbangan $\Sigma V = 0$ dapat kita tentukan pada titik simpul k dengan suatu potongan lingkaran:

$$V_k - P_k - U_k \sin\beta_k + U_{k+1} \sin\beta_{k+1} = 0$$

$$V_k - P_k - U_k \cos\beta_k \tan\beta_k + U_{k+1} \cos\beta_{k+1} \tan\beta_{k+1} = 0$$

Menurut rumus (9. 12.) dapat kita tentukan:

$$U_k \cos\beta_k = \frac{M_k}{h_k} \qquad U_{k+1} \cos\beta_{k+1} = \frac{M_k}{h_k}$$

$$\boxed{V_k = P_k + \frac{M_k}{h_k}(\tan\beta_k - \tan\beta_{k+1})} \qquad (9.\ 14.)$$

Jikalau kita memperlakukan penyelesaian ini pada titik simpul $k\text{-}1$ kita dapatkan:

$$-V_{k-1} - P_{k-1} - O_{k-1} \sin\gamma_{k-1} + O_k \sin\gamma_k = 0$$

$$V_{k-1} + P_{k-1} + O_{k-1} \cos\gamma_{k-1} - \tan\gamma_{k-1} - O_k \cos\gamma_k \tan\gamma_k = 0$$

$$O_{k-1} \cos\gamma_{k-1} = -\frac{M_{k-1}}{h_{k-1}} \qquad O_k \cos\gamma_k = -\frac{M_{k-1}}{h_{k-1}}$$

$$\boxed{V_{k-1} = -P_{k-1} + \frac{M_{k-1}}{h_{k-1}}(\tan\gamma_{k-1} - \tan\gamma_k)} \qquad (9.15.)$$

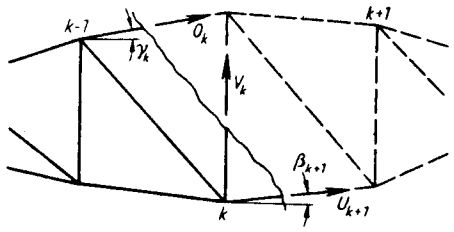
Jikalau tidak ada gaya yang bekerja pada titik simpul yang kita perhatikan $P = 0$ rumus (9. 14.) dan (9. 15.) menjadi rumus (9. 11.) jikalau batang tepi menjadi sejajar, karena $\beta_k = 0$, $\beta_{k-1} = 0$, $\gamma_{k-1} = 0$ dan $\gamma_k = 0$. Ketentuan ini membuktikan,

bahwa garis pengaruh pada gaya batang vertikal betul-betul menjadi suatu superposisi dari dua garis pengaruh yang sudah diketahui.

Jikalau kita perhatikan kemudian suatu konstruksi rangka batang dengan diagonal berarah sama seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. h. berikut dan dengan batang tepi bawah yang menerima beban, dapat kita tentukan:

$$R_A - \sum_{1}^{k} P_k + o_k \sin\gamma_k + U_{k+1}\sin\beta_{k+1} + V_k = 0$$

$$Q_{k+1} + O_k \cos\gamma_k \tan\gamma_k + U_{k+1}\cos\beta_{k+1}\tan\beta_{k+1} + V_k = 0$$



Gambar 9. 5. 3. h.

Menurut rumus (9. 12.) dapat kita tentukan:

$$O_k \cos\gamma_k = -\frac{M_k}{h_k} \qquad U_{k+1}\cos\beta_{k+1} = \frac{M_k}{h_k}$$

$$O_{k+1} - \frac{M_k}{h_h}\tan\gamma_k + \frac{M_k}{h_k}\tan\beta_{k+1} + V_k = 0$$

Jikalau batang tepi atas menerima beban, maka beban tidak mempengaruhi bagian kiri konstruksi rangka batang yang terpotong. Kemudian gaya lintang bagian kanan itu Q_k menggantikan Q_{k+1}. Persamaan gaya batang vertikal V_k kemudian dapat kita tentukan seperti berikut:

Batang tepi bawah
yang menerima beban: $V_k = -Q_{k+1} + \frac{M_k}{h_k}(\tan\gamma_k - \tan\beta_{k+1})$

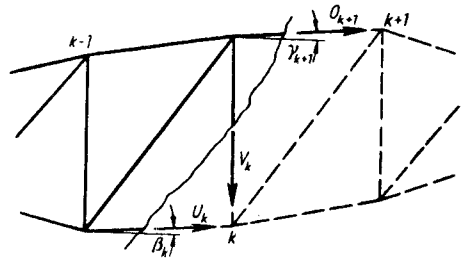
Batang tepi atas
yang menerima beban: $V_k = -Q_k + \frac{M_k}{h_k}(\tan\gamma_k - \tan\beta_{k+1})$

(9. 16.)

Jikalau kita memperhatikan selanjutnya suatu konstruksi rangka batang dengan diagonal berarah sesama seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. i. berikut dan dengan batang tepi bawah yang menerima beban, dapat kita tentukan:

$$R_A - \sum_{1}^{k-1} P_k + Q_{k+1}\sin\gamma_{k+1} + U_k \sin\beta_k - V_k = 0$$

$$Q_k - \frac{M_k}{h_k}\tan\gamma_{k+1} + \frac{M_k}{h_k}\tan\beta_k - V_k = 0$$



Gambar 9. 5. 3. i.

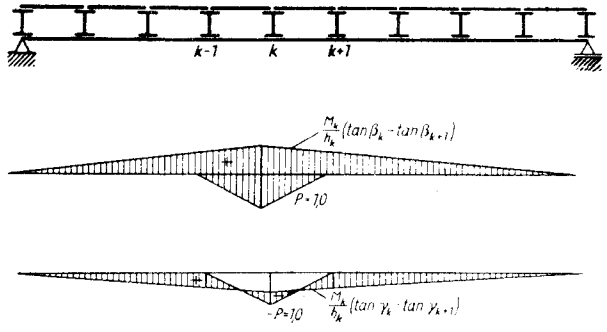
Jikalau batang tepi atas menerima beban, maka kita harus memperhatikan gaya lintang Q_{k+1} pada bagian kanan konstruksi rangka batang yang terpotong. Persamaan gaya batang vertikal V_k kemudian dapat kita tentukan seperti berikut:

Batang tepi atas
yang menerima beban: $V_k = +Q_{k+1} + \frac{M_k}{h_k}(\tan\beta_k - \tan\gamma_{k+1})$

Batang tepi bawah
yang menerima beban: $V_k = +Q_k + \frac{M_k}{h_k}(\tan\beta_k - \tan\gamma_{k+1})$

(9. 17.)

Kemungkinan-kemungkinan superposisi garis pengaruh menurut rumus (9. 14.) s/d rumus (9. 17.) dapat kita perhatikan pada gambar 9. 5. 3. k. berikut. Karena penyelesaian pada gambar itu dapat dilakukan pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi sejajar maupun tidak sejajar kita memilih sebagai sistim dasar suatu balok tunggal seperti terlihat pada bagian atas gambar 9. 5. 3. k. berikut.

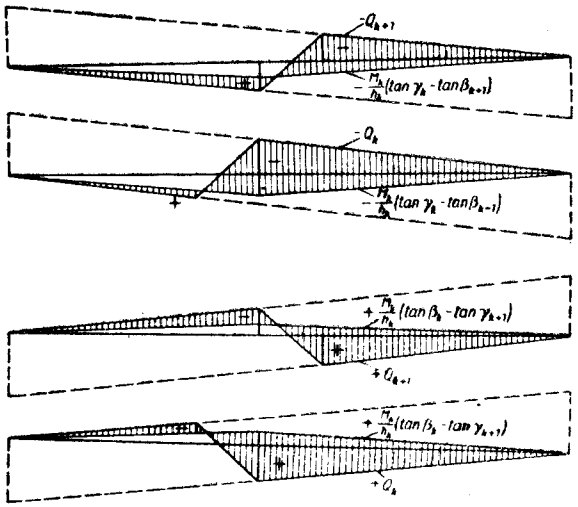


Sistim dasar

Garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_k menurut rumus-rumus:

(9. 14.)

(9. 15.)



(9. 16.)
dengan batang tepi bawah yang menerima beban

(9. 16.)
dengan batang tepi atas yang menerima beban

(9. 17.)
dengan batang tepi atas yang menerima beban

(9. 17.)
dengan batang tepi bawah yang menerima beban

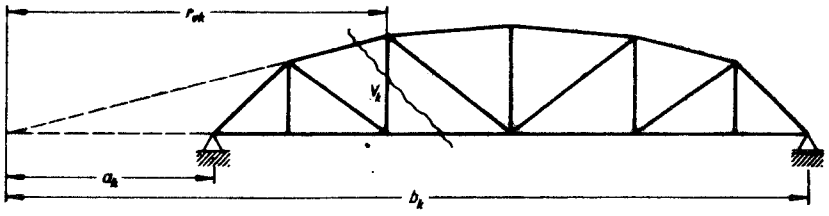
Gambar 9. 5. 3. k.

Penentuan garis pengaruh pada gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi tidak sejajar dan dengan semua diagonal yang turun atau naik, dapat kita lakukan menurut pengetahuan A. Ritter seperti pada penentuan garis pengaruh pada gaya batang diagonal.
Jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja pada bagian kanan dari konstruksi rangka batang yang terpotong penentuan dapat kita lakukan pada bagian kiri yang tidak dibebani:

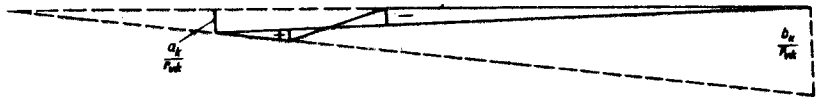
$$-R_A a_k - V_k \; r_{vk} = 0 \qquad \boxed{V_k = -R_A \frac{a_k}{r_{vk}}} \qquad (9.\,18.)$$

Jikalau gaya $P = 1.0$ bekerja pada bagian kiri dari konstruksi rangka batang yang terpotong penentuan dapat kita lakukan pada bagian kanan yang tidak dibebani:

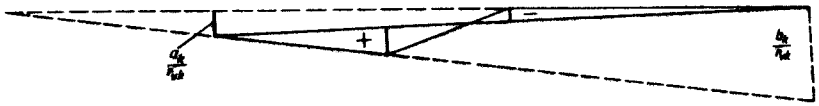
$$-R_B b_k + V_k \; r_{vk} = 0 \qquad \boxed{V_k = +R_B \frac{b_k}{r_{vk}}} \qquad (9.\,19.)$$



Sistim dasar



Garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_k dengan batang tepi bawah yang menerima beban



Garis pengaruh pada gaya batang vertikal V_k dengan batang tepi atas yang menerima beban

Gambar 9. 5. 3. 1.

Kita lihat, bahwa penentuan garis pengaruh pada gaya batang vertikal menjadi sebenarnya garis-garis pengaruh pada reaksi tumpuan masing-masing yang dikalikan dengan faktor masing-masing. Harus diperhatikan ketentuan batang tepi yang mana yang menerima beban seperti terlihat pada gambar 9. 5. 3. 1. di atas.

9. 5. 4. Ringkasan

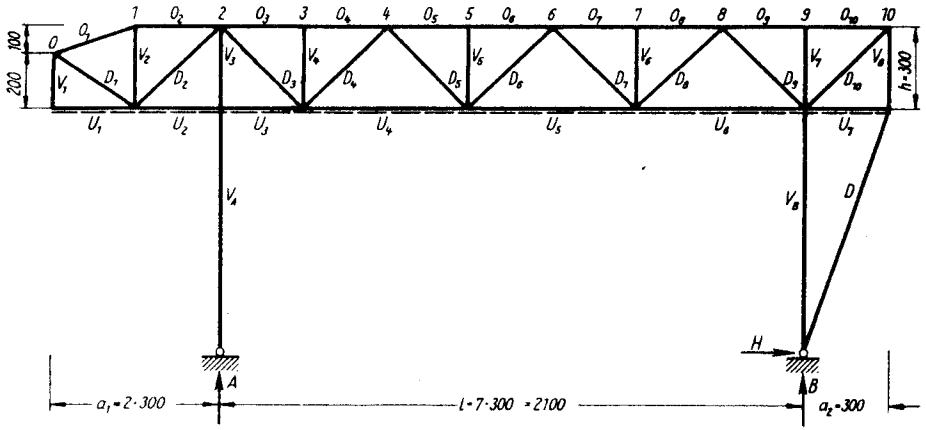
1. Penentuan garis pengaruh pada reaksi tumpuan pada konstruksi rangka batang menjadi sama seperti pada balok tunggal dengan lebar bentang yang sama.
2. Penentuan garis pengaruh pada gaya batang kita lakukan atas dasar pengetahuan penentuan gaya batang menurut A. Ritter dsb. yang kita dapatkan dari garis pengaruh pada momen lentur dan pada gaya lintang pada balok tunggal dengan lebar bentang yang sama.
3. Pada konstruksi rangka batang dengan batang tepi sejajar dapat kita tentukan:
   Garis pengaruh pada gaya batang tepi kita dapatkan dengan membagi garis pengaruh pada momen lentur dengan ordinatnya η oleh tingginya konstruksi rangka batang h tsb. Garis pengaruh pada gaya batang diagonal kita dapatkan dengan membagi garis pengaruh pada gaya lintang dengan ordinatnya η oleh $\sin \varphi$.
   Pada penentuan garis pengaruh pada gaya batang vertikal kita harus memperhatikan cara pemasangan diagonal-diagonal. Pada konstruksi rangka batang dengan diagonal yang naik turun batang vertikal menerima gaya vertikal menerima gaya vertikal pada titik simpul. Pada konstruksi rangka batang dengan diagonal semua naik atau semua turun batang vertikal menerima gaya lintang pada bagian kiri atau kanan dengan tanda $(+,-)$ berlawanan dengan

diagonal. Pada konstruksi rangka batang dengan diagonal saja kita harus memperhatikan beban yang tidak langsung. Garis pengaruh menjadi suatu garis lurus antara dua titik simpul.

4. Pada konstruksi rangka batang dengan tepi tidak sejajar dapat kita tentukan:
   Garis pengaruh pada gaya batang tepi kita dapatkan dengan membagi garis pengaruh pada momen lentur dengan ordinatnya η dengan jarak r yang siku-siku antara titik simpul (kutub) dan batang tepi berhadapan. Garis pengaruh pada batang diagonal kita dapatkan dengan superposisi dua garis pengaruh yang sudah diketahui atau dengan bantuan penentuan gaya batang menurut A. Ritter.
   Penentuan garis pengaruh pada gaya batang vertikal menjadi beraneka warna menurut cara pemasangan diagonal-diagonal, menurut batang tepi yang mana yang menerima beban dsb. Hanya pada konstruksi rangka batang dengan diagonalnya yang turun semua atau naik semua, dapat kita menggunakan pengetahuan penentuan gaya batang menurut A. Ritter.

9. 5. 5. Contoh-contoh

Contoh 1: Pada suatu derek berkonstruksi rangka batang portal menurut gambar 9. 5. 5. 1. a. berikut dicari garis-garis pengaruh pada gaya batang masing-masing.



Gambar 9. 5. 5. 1. a.

Penyelesaian:
Karena kita hanya memperhatikan gaya-gaya yang sejajar anting, reaksi tumpuan masing-masing menjadi vertikal dan reaksi tumpuan $H = O$ dan karena itu gaya batang $D = O$ juga.

1. Penentuan garis-garis pengaruh pada gaya batang tepi bawah (lihat gambar 9. 5. 5. 1. b. s/d e. berikut):

Batang U_1 dan U_7 menjadi batang nol. Pada U_2 dan U_3 momen pada tumpuan A yang berpengaruh. Garis pengaruh pada gaya batang U_4, U_5 dan U_6 berdasarkan pada momen lentur pada sistim dasar pada titik simpul yang berhadapan. Juga pada batang U_4, U_5 dan U_6 harus kita perhatikan pengetahuan tentang beban yang tidak langsung.

batang $U_2 = U_3$:

$$\eta_0 = -\frac{a_1}{h} = -\frac{6{,}0}{3{,}0} = -2{,}000$$

batang U_4:

$$\eta_4 = \frac{x_4 x'_4}{lh} = \frac{6{,}0.15{,}0}{21{,}0.3{,}0} = 1{,}428$$

$$\eta_0 = -\eta_4 = -1{,}428 \qquad \eta_{10} = -1{,}428\frac{3{,}0}{15{,}0} = -0{,}286$$

$$\eta_3 = 1{,}428\frac{3{,}0}{6{,}0} = 0{,}714 \qquad \eta_5 = 1{,}428\frac{12{,}0}{15{,}0} = 1{,}141$$

batang U_5:

$$\eta_6 = \frac{x_6 x'_6}{lh} = \frac{12{,}0.9{,}0}{21{,}0.3{,}0} = 1{,}714$$

$$\eta_0 = -1{,}714\frac{6{,}0}{12{,}0} = -0{,}857 \qquad \eta_{10} = -1{,}714\frac{3{,}0}{9{,}0} = -0{,}571$$

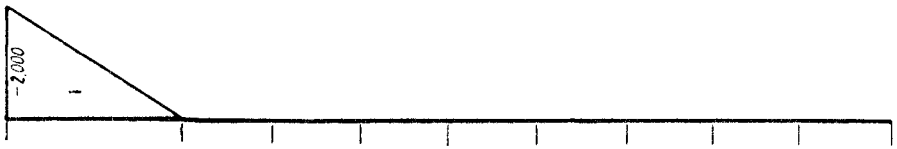
$$\eta_5 = 1{,}714\frac{9{,}0}{12{,}0} = 1{,}284 \qquad \eta_7 = 1{,}714\frac{6{,}0}{9{,}0} = 1{,}142$$

batang U_6:

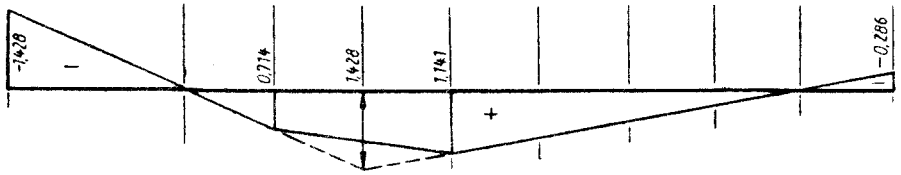
$$\eta_8 = \frac{x_8 x'_8}{lh} = \frac{18{,}0.3{,}0}{21{,}0.3{,}0} = 0{,}858$$

$$\eta_0 = -0{,}858\frac{6{,}0}{18{,}0} = -0{,}286 \qquad \eta_{10} = -0{,}858$$

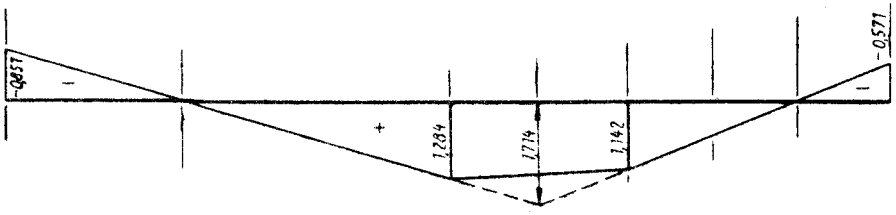
b) Garis pengaruh pada gaya batang $U_2 = U_3$:



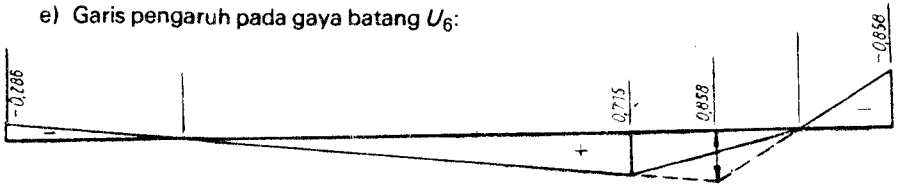
c) Garis pengaruh pada gaya batang U_4:



d) Garis pengaruh pada gaya batang U_5:



e) Garis pengaruh pada gaya batang U_6:



Gambar 9. 5. 5. 1. b. s/d e.

2. Penentuan garis-garis pengaruh pada gaya batang tepi atas (lihat gambar 9. 5. 5. f. s/d l. berikut):

Pada batang O_1 dan O_2 yang berpengaruh adalah momen lentur pada titik simpul 1 pada konsole. Garis pengaruh pada gaya batang O_3 s/d O_8 berdasarkan pada momen lentur pada sistim dasar, dan batang O_9 dan O_{10} kita perhatikan momen pada tumpuan B.

batang O_1:

$$\cos\gamma = \frac{3,0}{\sqrt{3,0^2 + 1,0^2}} = 0,95 \qquad r = h\cos\gamma = 3,0.0,95 = 2,85$$

$$\eta_0 = \frac{M_1}{r} = \frac{3,0}{2,85} = 1,052 \qquad \eta_1 = 0$$

batang O_2:

$$\eta_0 = \frac{M_1}{h} = \frac{3,0}{3,00} = 1,000 \qquad \eta_1 = 0$$

batang $O_3 = O_4$:

$$\eta_3 = -\frac{x_3 x'_3}{lh} = -\frac{3,0.18,0}{21,0.3,0} = -0,858$$

batang $O_5 = O_6$:

$$\eta_5 = -\frac{x_5 x'_5}{lh} = -\frac{9,0.12,0}{21,0.3,0} = -1,714$$

batang $O_7 = O_8$:

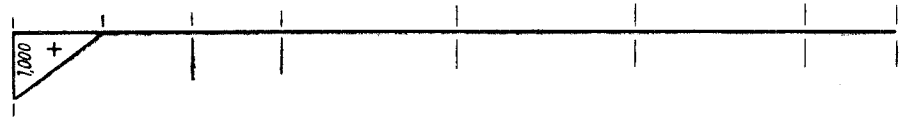
$$\eta_7 = -\frac{x_7 x'_7}{lh} = -\frac{15,0.6,0}{21,0.3,0} = -1,428$$

batang $O_9 = O_{10}$:

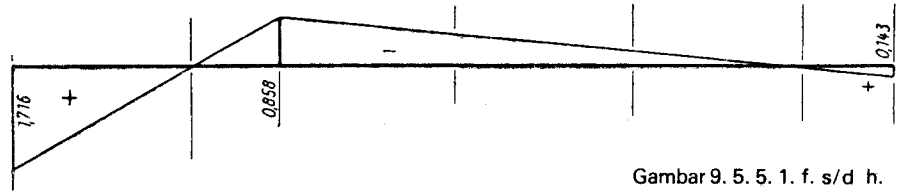
$$\eta_{10} = \frac{a_1}{h} = \frac{3,0}{3,0} = 1,000$$

f) Garis pengaruh pada gaya batang O_1:

g) Garis pengaruh pada gaya batang O_2:

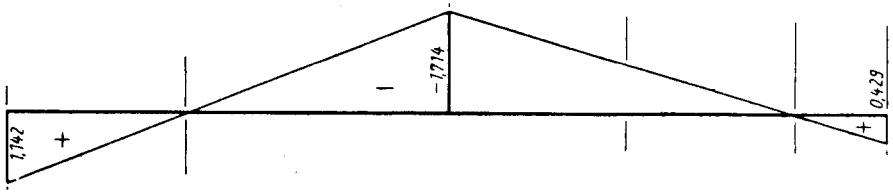


h) Garis pengaruh pada gaya batang $O_3 = O_4$:



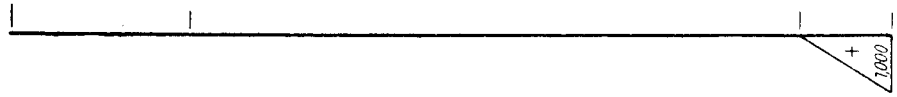
Gambar 9. 5. 5. 1. f. s/d h.

i) Garis pengaruh pada gaya batang $O_5 = O_6$:



k) Garis pengaruh pada gaya batang $O_7 = O_8$:

l) Garis pengaruh pada gaya batang $O_9 = O_{10}$:



Gambar 9. 5. 5. 1. i. s/d l.

3. Penentuan garis-garis pengaruh pada gaya batang diagonal (lihat gambar 9. 5. 5. 1. m. s/d s.):

Garis pengaruh pada gaya batang diagonal D_1 dapat kita tentukan menurut rumus (9. 13.) dan pada garis pengaruh pada gaya batang diagonal yang lain kita perhatikan rumus (9. 10.). Pada batang diagonal D_2 dan D_{10} kita gunakan garis pengaruh pada gaya lintang konsole dan pada batang diagonal yang lain garis pengaruh pada gaya lintang pada balok tunggal.

batang D_1:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_u}{h_u} - \frac{M_o}{h_o}\right)$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2{,}0^2 + 3{,}0^2}}{3{,}0} = 1{,}20$$

karena momen lentur $M_o = 0$ dapat kita tentukan:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{M_u}{h_u} \qquad \eta_0 = \frac{1}{\cos\varphi}\left(-\frac{M_1}{h_1}\right) = -1{,}20\frac{3{,}0}{3{,}0} = -1{,}200$$

batang D_2:

$$D = \frac{Q}{\sin\varphi} = \frac{1{,}0}{\sin\varphi} = 1{,}414 \qquad \eta_0 = \eta_1 = 1{,}414 \qquad \eta_2 = 0$$

Antara titik simpul 1 dan titik simpul 2 harus kita perhatikan beban yang tidak langsung.

batang D_3 s/d D_9:
Pada semua garis pengaruh pada gaya batang diagonal ini dapat kita tentukan:

$$\eta_a = -\eta_b = \frac{1{,}0}{\sin\varphi} = \sqrt{2} = 1{,}414 \qquad \varphi = 45°$$

$$\eta_0 = \eta_b\frac{a_1}{l} = 1{,}414\frac{6{,}0}{21{,}0} = 0{,}404$$

$$\eta_{10} = \eta_a\frac{a_2}{l} = 1{,}414\,\frac{3{,}0}{21{,}0} = 0{,}202$$

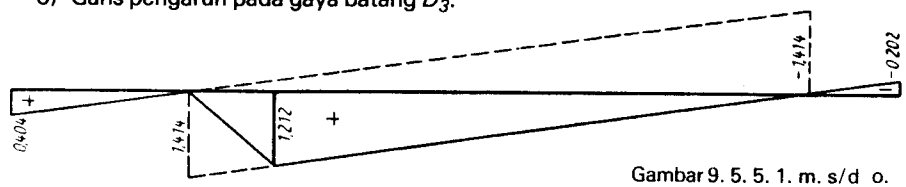
batang D_{10}:

$$\eta_{10} = -\frac{1{,}0}{\sin\varphi} = -1{,}414 \qquad \eta_g = 0$$

m) Garis pengaruh pada gaya batang D_1:

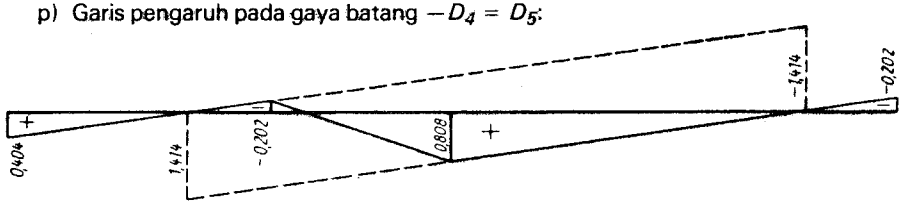
n) Garis pengaruh pada gaya batang D_2:

o) Garis pengaruh pada gaya batang D_3:

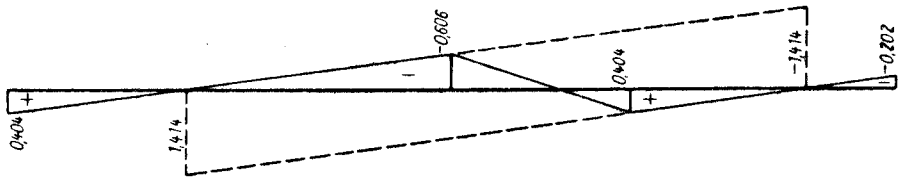


Gambar 9. 5. 5. 1. m. s/d o.

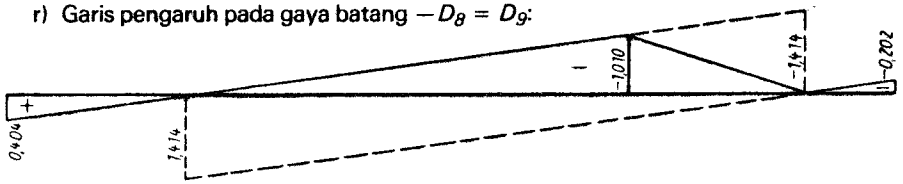
p) Garis pengaruh pada gaya batang $-D_4 = D_5$:



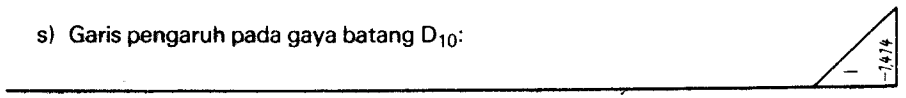
q) Garis pengaruh pada gaya batang $-D_6 = D_7$:



r) Garis pengaruh pada gaya batang $-D_8 = D_9$:



s) Garis pengaruh pada gaya batang D_{10}:



Gambr 9. 5. 5. 1. p. s/d s.

4. Penentuan garis-garis pengaruh pada gaya batang vertikal (lihat gambar 9. 5. 5. 1. t. s/d w. berikut):

Gaya batang vertikal V_1 dan V_8 menjadi sama dengan beban pada titik simpulnya. Gaya batang vertikal V_3 menjadi sama dengn reaksi tumpuan A. Batang vertikal V_2 menerima beban oleh batang tepi atas yang mengubah jurusannya pada titik simpul 1, tetapi batang vertikal V_4 s/d V_7 menjadi batang nol.

batang V_1:

$$\eta_0 = 1{,}000 \qquad \eta_1 = 0$$

batang V_2:

menurut rumus (9. 15.) $\rightarrow$ $V_2 = -P_1 + \dfrac{M_1}{h_1}(\tan\gamma_1 - \tan\gamma_2)$.

Karena batang tepi atas tidak menerima beban, maka $P_1 = 0$ dan kemudian juga $\gamma_2 = 0$ dan selanjutnya:

$$V_2 = \frac{M_1}{h_1}\tan\gamma_1 \qquad \tan\gamma_1 = \frac{1{,}0}{3{,}0} = 0{,}333$$

$$\eta_0 = -\frac{3{,}0}{3{,}0}\,0{,}333 = -0{,}333 \qquad \eta_1 = 0$$

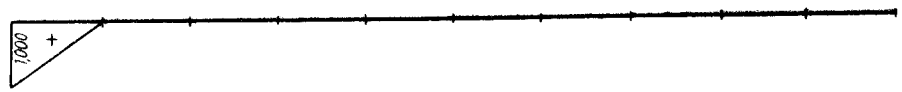
batang V_3:

$$\eta a = -1{,}000 \qquad \eta_0 = -1{,}000\,\frac{27{,}0}{21{,}0} = -1{,}287$$

batang V_8:

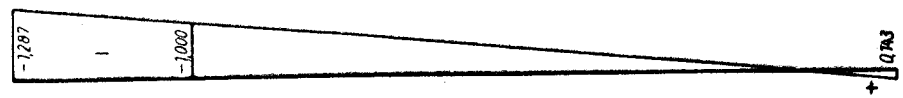
$$\eta_{10} = 1{,}000 \qquad \eta_9 = 0$$

t) Garis pengaruh pada gaya batang V_1:

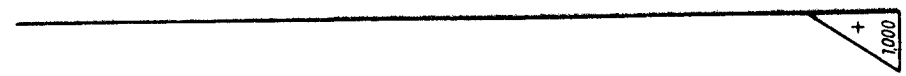


u) Garis pengaruh pada gaya batang V_2:

v) Garis pengaruh pada gaya batang V_3:

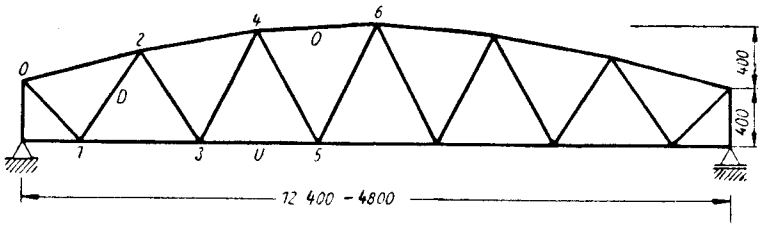


w) Garis pengaruh pada gaya batang V_8:



Gambar 9. 5. 5. 1. t. s/d w.

Contoh 2: Pada suatu jembatan kereta api berkonstruksi rangka batang dengan diagonal saja menurut gambar 9. 5. 5. 2. a. berikut, tentukanlah gaya batang U, O dan D oleh berat sendiri $g = 2.0$ t/m dan oleh kereta api seperti ditentukan pada gambar 9. 1. 1. a. dan gambar 9. 5. 5. 2. b. dan c. Titik simpul pada batang tepi atas berada pada suatu garis parabol.



Gambar 9. 5. 5. 2. a.

Penyelesaian:

2. Penentuan garis pengaruh pada gaya batang U:

$$h_4 = h_0 + \frac{4(h_6 - h_0)}{l^2} x_4 x'_4 = 4{,}0 + \frac{4.4{,}0}{48{,}0^2}\, 16{,}0.32{,}0$$

$$h_4 = 4{,}00 + 3{,}56 = 7{,}56\,\text{m}$$

$$h_4 = \frac{x_4 x'_4}{l h_4} = \frac{16{,}0.32{,}0}{48{,}0.7{,}56} = 1{,}41$$

Karena pada batang *U* harus kita perhatikan pengaruh oleh beban yang tidak langsung, maka kita tentukan:

$$\eta_3 = 1{,}41\frac{12{,}0}{16{,}0} = 1{,}058 \qquad \eta_5 = 1{,}41\frac{28{,}0}{32{,}0} = 1{,}232$$

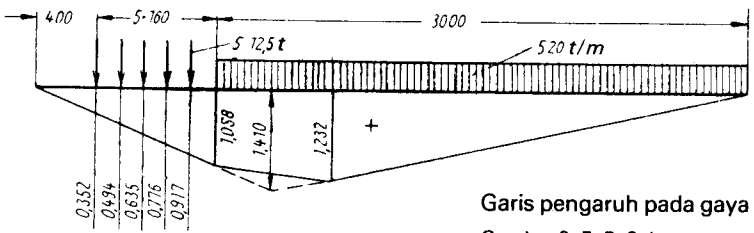
Selanjutnya kita harus mencari penempatan kereta api yang paling tidak menguntungkan sistimnya. Kita memilih jarak-jarak tsb. seperti terlihat pada gambar 9. 5. 5. 2. b. berikut.

$$U_g = 2{,}0\left[\frac{1}{2}\,12{,}0 \cdot 1{,}058 + 8{,}0\,\frac{1}{2}\,(1{,}058 + 1{,}232) + \frac{1}{2}\,28{,}0 \cdot 1{,}232\right]$$

$$U_g = 2{,}0\,(6{,}35 + 9{,}16 + 17{,}24) = 2{,}0.32{,}75 = 65{,}6\,\text{t}$$

$$U_p = 12{,}5\,(0{,}352 + 0{,}494 + 0{,}635 + 0{,}776 + 0{,}917) + 5{,}2\,(9{,}16 + 17{,}24)$$

$$U_p = 12{,}5 \cdot 3{,}174 + 5{,}2 \cdot 26{,}4 = 39{,}6 + 137{,}2 = 176{,}8\,\text{t}$$



Garis pengaruh pada gaya batang *U*

Gambar 9. 5. 5. 2. b.

2. Penentuan garis pengaruh pada gaya batang O:

$$h_5 = 7{,}56 + 12\,(8{,}0 - 7{,}56) = 7{,}78\,\text{m}$$

$$\cos\gamma = \frac{4{,}0}{\sqrt{4{,}0^2 + 0{,}44^2}} = 0{,}904 \qquad r_5 = h_5 \cos\gamma = 7{,}78.0{,}994 = 7{,}73\,\text{m}$$

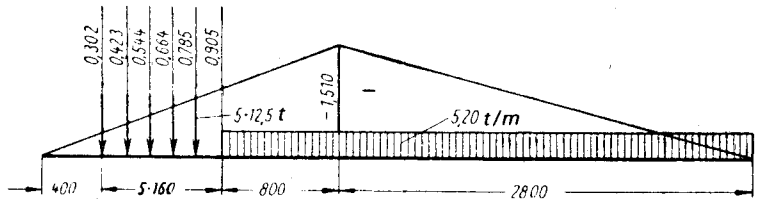
$$\eta_5 = -\frac{x_5 x'_5}{l h_5} = \frac{20{,}0.28{,}0}{48{,}0.7{,}73} = -1{,}51$$

$$O_g = -2{,}0\,\frac{1}{2}\,1{,}51 \cdot 48{,}0 = -72{,}5\,\text{t}$$

$$O_p = -12{,}5\,(0{,}302 + 0{,}423 + 0{,}544 + 0{,}664 + 0{,}785)$$

$$-5{,}2\,\left[8{,}0\,\frac{1}{2}\,(0{,}905 + 1{,}51) + \frac{1}{2}\,1{,}51.28{,}0\right]$$

$$O_p = -12{,}5 \cdot 2{,}718 - 5{,}2\,(9{,}66 + 21{,}14) = -194{,}0\,\text{t}$$



Garis pengaruh pada gaya batang *O*

Gambar 9. 5. 5. 2. c.

3. Penentuan garis pengaruh pada gaya batang D (lihat juga gambar 9. 5. 5. 2. d. s/d f. berikut):

Kita tentukan pertama titik potong batang tepi bawah dan batang tepi atas dan jarak siku-siku titik potong itu ke batang diagonal *D* yang kita perhatikan.

$$a_i : h_0 = (a_i + \lambda) : h_2 \qquad a_i = \frac{h_0 \lambda}{h_2 - h_0}$$

$$h_2 = h_0 + \frac{h_6 - h_0}{l^2} x_2 x'_2 = 4{,}0 + \frac{4 \cdot 4{,}0}{48{,}0^2}\, 8{,}0 \cdot 40{,}0 = 6{,}22\,\text{m}$$

$$a_i = \frac{4{,}0 \cdot 8{,}0}{2{,}22} = 14{,}4\,\text{m} \qquad b_i = a_i + l = 14{,}4 + 48{,}0 + 48{,}0 = 62{,}4\,\text{m}$$

Jarak r_d dapat kita tentukan dengan mudah karena dua segitiga yang di-arsir pada gambar 9. 5. 5. 2. d. menjadi sebangun. Karena itu r_d menjadi 15.5 m. Ordinat-ordinat η pada reaksi tumpuan masing-masing kemudian menjadi:

$$\eta_A = \frac{a_i}{r_d} = \frac{14{,}4}{15{,}5} = 0{,}930 \qquad \eta_o = \frac{b_i}{r_d} = \frac{62{,}4}{15{,}5} = 4{,}02$$

Penentuan penempatan kereta api yang paling tidak menguntungkan sistimnya dapat kita lihat pada gaya batang D maksimal (gambar 9. 5. 5. 2. e.) dan pada gaya batang D minimal (gambar 9. 5. 5. 2. f.)

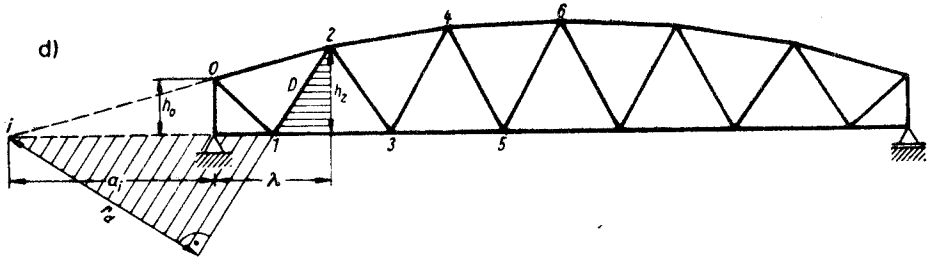
$$D_g = 2{,}0\left(\frac{1}{2}\,0{,}335 \cdot 6{,}40 - \frac{1}{2}\,0{,}697 \cdot 41{,}60\right) = -26{,}84\ \text{t}$$

$$D_{p\,max} = 12{,}5\,(0{,}067 + 0{,}201 + 0{,}335 + 0{,}112) = +8{,}94\ \text{t}$$

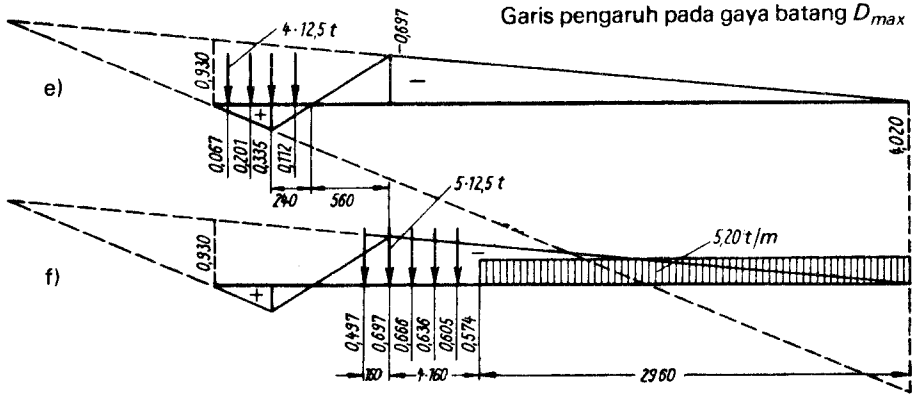
$$D_{p\,min} = -12{,}5\,(0{,}497 + 0{,}697 + 0{,}666 + 0{,}636 + 0{,}605) - 2{,}0\,\frac{1}{2}\,29{,}6 \cdot 0{,}574$$

$$D_{p\,min} = -12{,}5 \cdot 3{,}101 - 17{,}0 = -55{,}8\ \text{t}$$

d)



Garis pengaruh pada gaya batang D_{max}



Garis pengaruh pada gaya batang D_{min} :

Gambar 9. 5. 5. 2. d. s/d f.

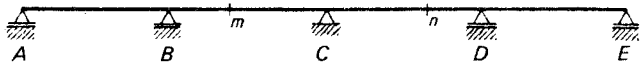
9. 6. Garis pengaruh pada balok terusan

9. 6. 1. Pengetahuan dasar

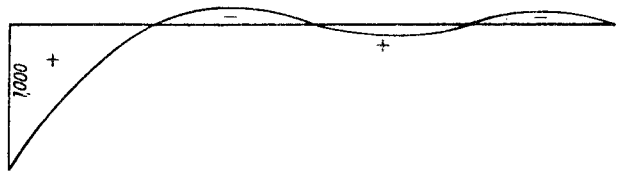
Sampai saat ini kita hanya memperhatikan dan menentukan garis pengaruh pada sistim statis tertentu. Sesudah kita ketahui beberapa ordinat η yang penting, maka garis pengaruh sudah dapat digambar.

Garis pengaruh pada sistim statis tidak tertentu menjadi bukan garis lurus, melainkan garis bengkok. Penentuan ordinat-ordinat η pada umumnya memerlukan banyak pekerjaan dan perhitungan sampai garis pengaruh itu dapat digambar.

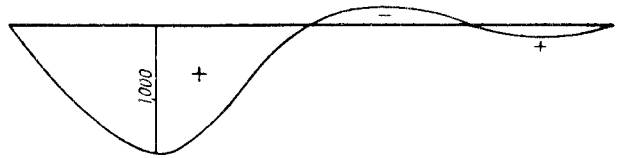
Pada gambar 9. 6. 1. a. berikut dapat dilihat garis-garis pengaruh pada suatu balok terusan. Kita melihat, bahwa terutama pada bagian balok terusan dengan nilai yang kita cari, bentuk garis pengaruh, walaupun melengkung, menjadi sebangun dengan garis-garis pengaruh pada balok tunggal. Oleh karena itu, pengetahuan garis-garis pengaruh pada balok tunggal dapat membantu tanggapan kita pada penentuan garis pengaruh pada balok terusan.



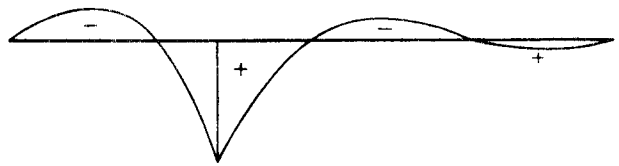
Gambar 9. 6. 1. a.



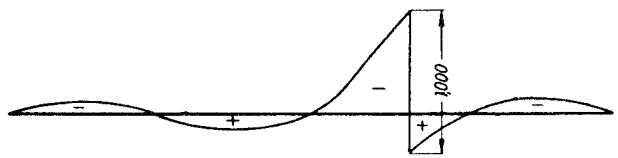
Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A



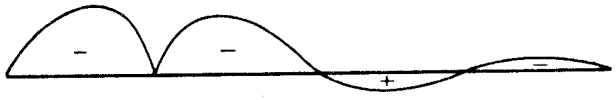
Garis pengaruh pada reaksi tumpuan B



Garis pengaruh pada momen lentur M pada titik sembarang m



Garis pengaruh pada gaya lintang Q pada titik sembarang n



Garis pengaruh pada momen pada tumpuan B

Karena penentuan garis-garis pengaruh pada balok terusan sering diperlukan walaupun penentuan menjadi agak rumit maka biasanya digunakan tabel-tabel. Tabel-tabel itu pada balok terusan dengan jarak tumpuan masing-masing menjadi sama dan dengan momen lembam I tetap ditentukan ordinat-ordinat η pada titik-titik sepersepuluhan lebar bentang l. Tabel-tabel itu ditemukan oleh misalnya: *Anger-Tram, Zellerer, Kapferer* atau *Kleinlogel.*

Penentuan garis-garis pengaruh pada balok terusan dengan beban tidak langsung masih tetap berlaku seperti pada balok tunggal dsb., maka oleh itu garis-garis pengaruh bukan lagi menjadi garis lengkung melainkan garis poligon.

Penentuan garis-garis pengaruh pada balok terusan dapat dilakukan secara analitis atau secara grafis dengan bantuan sistim titik potong, lihat bab 6. 3.

Dalam rangka buku ini garis pengaruh pada balok terusan kita bicarakan hanya pada prinsipnya dan tanpa contoh-contoh karena penyelesaian terlalu luas untuk tujuan buku ini.

9. 6. 2. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan yang statis berlebih

Garis-garis pengaruh pada reaksi tumpuan, momen lentur maupun gaya lintang pada suatu sistim statis tidak tertentu berdasarkan pada garis pengaruh pada reaksi tumpuan yang statis berlebih. Karena itu pertama kita tentukan garis pengaruh itu.

Sebagai keterangan kita perhatikan suatu balok terusan terletak di atas lima tumpuan, seperti terlihat pada gambar 9. 6. 2. a. berikut.

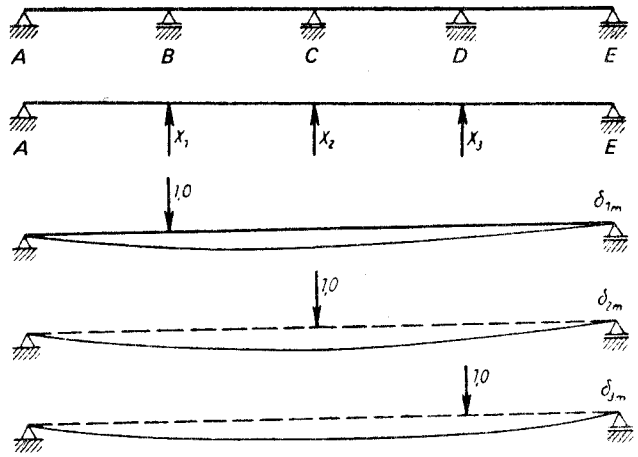
Kemudian kita menentukan reaksi tumpuan vertikal R_B, R_C dan R_D sebagai reaksi tumpuan yang statis berlebih dengan nilai X_1, X_2 dan X_3. Pada beban yang mati (tetap) dapat kita tentukan tiga persamaan berikut untuk mencari tiga nilai yang statis berlebih, X_1, X_2 dan X_3:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 = -\delta_{10}$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 = -\delta_{20}$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 = -\delta_{30}$$

Pada rumus-rumus ini δ_{ki} misalnya menjadi pergeseran titik k oleh gaya X_i. Bagian beban δ_{ko} menjadi pergeseran titik k oleh beban yang sebenarnya. Semua pergeseran ditentukan pada sistim dasar, yaitu pada balok tunggal.



Gambar 9. 6. 2. a.

Pada penentuan garis pengaruh beban atau cara pembebanan pada sistim statis biasanya belum diketahui. Karena itu nilai δ_{ko} belum dapat kita tentukan dengan suatu angka tertentu. Jikalau kita menggulingkan suatu gaya $P = 1{,}0$ pada seluruh panjang balok terusan ini nilai δ_{ko} berubah pada tiap-tiap pergeseran gaya P itu. Jikalau kita menentukan pergeseran δ_{10} dengan $P = 1{,}0$ sebagai ordinat di bawah tiap-tiap titik tangkap gaya P itu, maka δ_{10} sebetulnya menjadi garis pengaruh pada lendutan pada titik 1 pada sistim dasar yang statis tertentu. Sama saja dapat kita tentukan pada δ_{20} dan δ_{30} Menurut bab 9. 2. 5. garis pengaruh pada lendutan menjadi garis elastis oleh suatu gaya $P = 1{,}0$ pada titik 1, 2 atau 3. Nilainya dapat kita tentukan dengan cara-cara yang sudah diketahui, dan yang kita tentukan sebagai δ_{km}.

Selanjutnya kita memperhatikan tiga persamaan di atas. Sebagai nilai δ_{1m}, δ_{2m} dan δ_{3m} kita ketahui garis-garis pengaruh pada lendutan pada titik 1, 2 dan 3 yang menjadi identik dengan garis elastis pada sistim statis tertentu oleh gaya $P = 1{,}0$ pada titik 1, 2 atau 3. Bagian kanan pada tiga persamaan δ_{1m}, δ_{2m} dan δ_{3m} itu pada tiap-tiap titik sembarang pada balok terusan ini berisi suatu nilai. Karena itu pada X_1, X_2 dan X_3 kita mendapatkan nilai-nilai yang tergantung dari titik tangkap gaya $P = 1{,}0$ dan yang menjadi ordinat-ordinat pada garis pengaruh pada reaksi tumpuan yang statis berlebih.

Karena nilai-nilai δ_{km} tidak menjadi tetap kita belum mendapatkan hasil pada tiga persamaan ini. Tetapi karena δ_{ik} menjadi pergeseran suatu titik i oleh $X_k = 1{,}0$ pada titik k. Dengan δ_{km} kita menentukan garis elastis oleh gaya $P = 1{,}0$ pada titik k. Jikalau kita memperhatikan ordinat garis elastis pada titik i yang menjadi δ_{ik} yang pada saat ini menjadi juga δ_{ki}. (Lihat juga rumus (8. 20.), Syarat dari Maxwell).

Pada sistim statis tertentu dengan satu nilai yang statis berlebih, perhitungan ini menjadi mudah karena kita hanya membagi ordinat garis elastis δ_{1m} atas δ_{11} dan mendapat ordinat garis pengaruh pada X_1.

Atas dasar penentuan-penentuan di atas dapat kita menentukan garis elastis pada reaksi tumpuan yang statis berlebih X_1, X_2, ... X_n. Tinggallah kemudian penentuan garis pengaruh pada reaksi tumpuan, momen lentur dan gaya lintang.

9. 6. 3. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan, momen lentur dan gaya lintang

Pada balok terusan dengan beban tetap (mati) dapat kita tentukan reaksi tumpuan, momen lentur dan gaya lintang dengan bantuan reaksi tumpuan yang statis berlebih X_1, X_2, ... X_n dengan superposisi:

$$R_A = R_{A0} + X_1R_{A1} + X_2R_{A2} + ... + X_kR_{Ak} + ... + X_nR_{An}$$
$$M = M_0 + X_1M_1 + X_2M_2 + ... + X_kM_k + ... + X_nM_n$$
$$Q = Q_0 + X_1Q_1 + X_2Q_2 + ... + X_kQ_k + ... + X_nQ_n$$

Pada penentuan garis-garis pengaruh kita gunàkan cara yang sama. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A kita dapatkan oleh superposisi ordinat garis pengaruh R_{A0}, dengan R_{A1}, yang dikalikan dengan ordinat garis pengaruh pada X_1, dengan R_{A2} yang dikalikan dengan ordinat garis pengaruh pada X_2 dsb. Pada penentuan ini R_{A1} menjadi reaksi tumpuan oleh $X_1 = 1.0$, R_{A2} menjadi reaksi tumpuan oleh $X_2 = 1.0$ dsb. Sebagai ringkasan dapat kita katakan, bahwa garis-garis pengaruh pada balok terusan atau pada sistim statis tidak tertentu yang lain terdiri dari bagian-bagian seperti berikut:

1. Ordinat garis pengaruh pada sistim dasar (balok tunggal dsb.) dengan nilai R_{A0}, Q_0 dan M_0.
2. Ordinat garis pengaruh pada reaksi tumpuan yang statis berlebih X_1, X_2, ... X_n dan yang diakibatkan oleh $X_1 = 1.0$, $X_2 = 1.0$, ... $X_n = 1.0$ pada titik yang kita perhatikan dan yang harus dikalikan dengan R_{A1}, R_{A2}, ... R_{An} atau M_1, M_2, ... M_n atau Q_1, Q_2, ... Q_n.

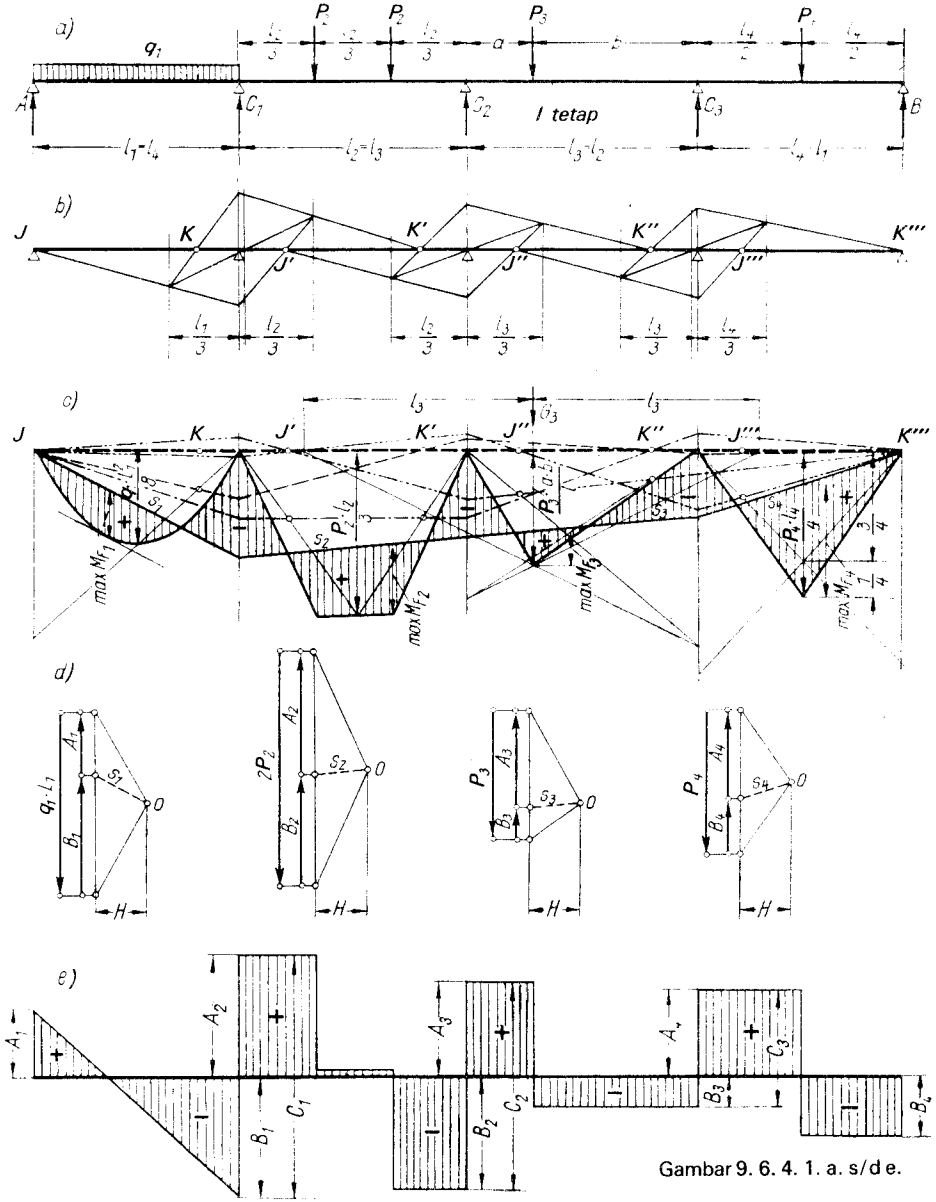
Kita melihat bahwa pemborosan perhitungan untuk penentuan garis-garis pengaruh pada sistim yang statis tidak tertentu menjadi besar sekali.
Akan tetapi kalau kita memperhatikan cara perhitungan ini kita dapat melihat, bahwa caranya menjadi sebetulnya sama seperti pada perhitungan balok terusan secara grafis dengan menggunakan sistim titik potong (lihat bab 6.3.).

9. 6. 4. Penentuan garis-garis pengaruh secara grafis

1. Penentuan momen lentur dan gaya lintang pada balok terusan dengan beban yang tetap (mati):

Pada suatu balok terusan dengan macam-macam beban dan gaya seperti terlihat pada gambar 9. 6. 4. 1. a. berikut kita tentukan titik potong menurut bab 6. 3. 2. (lihat gambar 9. 6. 4. l. b.) dan kemudian dengan superposisi dapat kita menggambar diagram momen menurut bab 6. 3. 3. (lihat gambar 9. 6. 4. 1. c.). Kemudian kita menentukan masing-masing reaksi tumpuan secara grafis seperti diterangkan pada

bab 6. 3. 3. contoh 2 (lihat gambar 6. 3. 3. f. dan 9. 6. 4. 1. d.) dan dengan hasil reaksi tumpuan masing-masing dapat digambar diagram gaya lintang (lihat gambar 6. 3. 3. g. dan 9. 6. 4. 1. e. berikut):



Gambar 9. 6. 4. 1. a. s/d e.

2. Penentuan garis-garis pengaruh pada balok terusan dengan beban yang tidak tetap (bergerak):

Supaya penentuan garis-garis pengaruh yang menjadi garis lengkung menjadi seteliti mungkin, biasanya bagian balok terusan masing-masing dibagi sepuluh. Pada contoh berikut, lihat gambar 9. 6. 4. 3. a. s/d g. kita hanya membagi empat supaya gambar tidak menjadi terlalu rumit.

Seperti pada beban tetap kita pertama menentukan titik potong *J*, *J'*, *J''* dsb. dan *K*, *K'*, *K''* dsb. (lihat gambar 9. 6. 4. 1. b.). Kemudian kita menggulingkan suatu gaya $P = 1.0$ pada seluruh panjangnya balok terusan ini. Gaya $P = 1.0$ selalu berhenti sebentar pada msing-masing titik yang kita tentukan tadi. Pada tiap-tiap perhentian ini kita menggambar diagram momen M_o (lihat gambar 9. 6. 4. 3. a. dan b.). Diagram momen itu dapat digambar dengan bantuan potongan garis bersilang, lihat juga gambar 6. 2. 2. c. pada bab 6. 2. 2.

Karena contoh ini menjadi simetris, cukup jikalau digambar garis pengaruh pada bagian pertama dan kedua.

3. Garis pengaruh pada momen lentur:

Jikalau kita mau menggambar garis pengaruh pada momen lentur pada titik sembarang 3 (M_3) kita mengukur dari diagram momen pada titik 3 semua nilai η_2 s/d η_4 yang sebagai ordinat garis pengaruh kita gambar pada tiap-tiap titik, misalnya η_2 pada titik 2, η_3 pada titik 3 dsb. Ujung-ujung ordinat ini dihubungkan dengan garis lengkung dan mendapat garis pengaruh pada momen lentur M_3 (lihat gambar 9. 6. 4. 3. a. dan c.)

Cara ini berlaku pada bagian balok terusan yang diperhatikan. Pada bagian-bagian yang lain kita mengukur nilai ordinat η_6 s/d η_9 antara garis sumbu balok terusan dan garis penutup dari diagram momen (lihat gambar 9. 6. 4. 3. b. dan c.). Karena balok terusan pada contoh ini menjadi simetris nilai ordinat η_2' s/d η_4' dan η_6' s/d η_9' dapat diambil pada titik 3' sebelah kanan (lihat gambar 9. 6. 4. 3. a. dan b.).

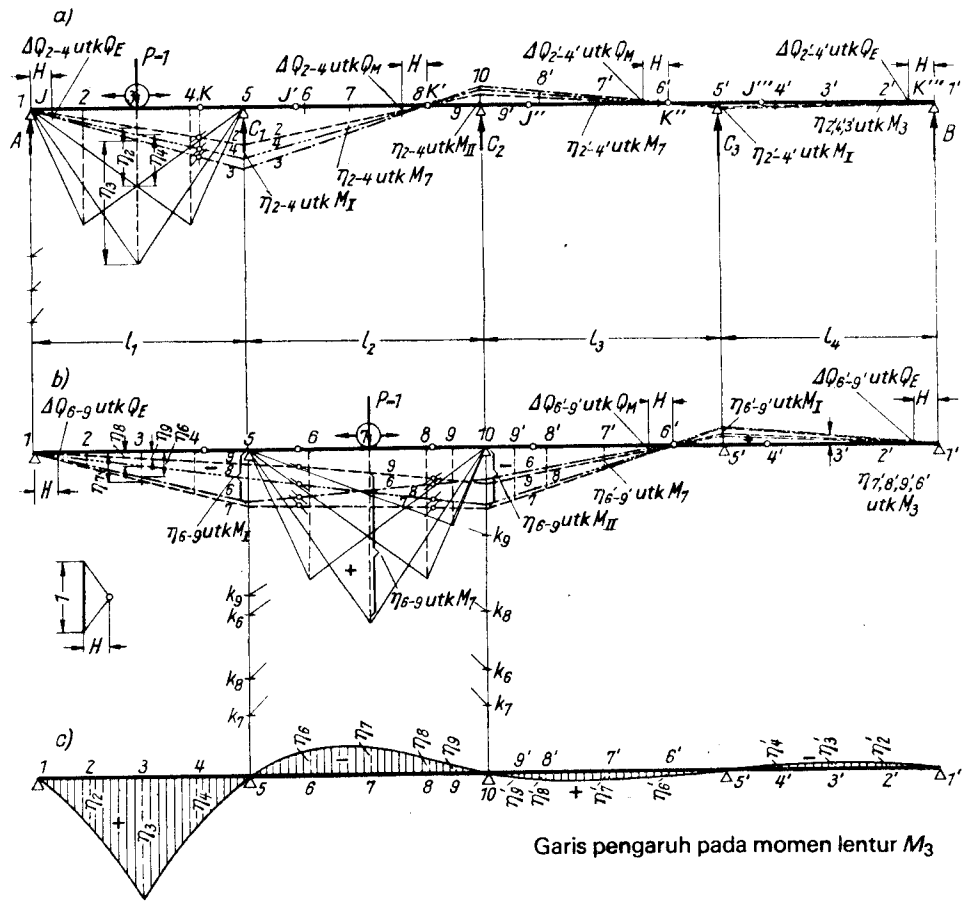
Maka dapat kita lakukan penentuan garis pengaruh pada momen lentur M_7.

Kita lihat, bahwa penentuan momen maksimal kita dapatkan jikalau semua beban berada pada satu bagian dari balok terusan, dan bagian sebelah kiri serta bagian sebelah kanan tinggal kosong. Pengaruh suatu gaya atau beban atas bagian ketiga sudah hampir menjadi nol.

Yang harus kita perhatikan dengan khusus ialah suatu titik sembarang (9) yang berada antara suatu titik potong (*K'*) dan suatu tumpuan (C_2) seperti terlihat garis pengaruhnya pada gambar 9. 6. 4. 3. a. berikut. Nilai momen maksimal kita dapatkan pada suatu beban merata terbatas. Sebagai garis putus pada gambar itu dapat dilihat garis pengaruh pada momen lentur pada titik potong *K''*.

Pada penentuan garis pengaruh pada momen tumpuan M_I kita dapat mengukur η_2' s/d η_4' dan η_6' s/d η_9' pada C_3 (lihat gambar 9. 6. 4. 3. f.). Pada penentuan garis pengaruh pada momen tumpuan M_{II} kita dapat mengukur semua ordinat η pada tumpuan C_2 (lihat gambar 9. 6. 4. 3. a., b. dan g.).

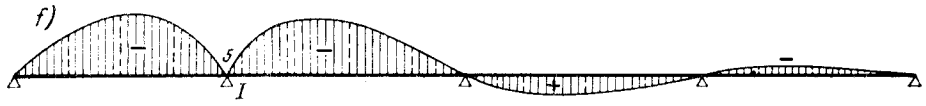
Kita lihat, bahwa penentuan momen maksimal kita dapatkan jikalau semua beban berada pada bagian sebelah kiri dan kanan pada tumpuan yang kita perhatikan. Bagian-bagian sesudahnya sebaiknya ditinggalkan kosong.



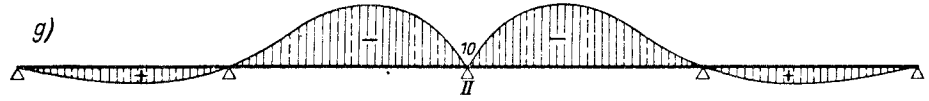
Garis pengaruh pada momen lentur M_3

Garis pengaruh pada momen lentur M_7

Garis pengaruh pada momen lentur M_9



Garis pengaruh pada momen tumpuan M_I



Garis pengaruh pada momen tumpuan M_{II} Gambar 9. 6. 4. 3. a. s/d g.

4. Garis pengaruh pada gaya lintang:

Pada penentuan garis pengaruh pada gaya lintang (lihat gambar 9. 6. 4. 4. a. s/d f. berikut) kita sebaiknya memperhatikan suatu balok tunggal (lihat bab 9. 2. 2.) dan mengingat, bahwa dua momen tumpuan menurut perbandingan nilainya dan tanda (+, —) mengakibatkan suatu tambahan atau kurangan pada gaya lintang atau reaksi tumpuan menurut rumus (6. 16.) dan (6. 17.) yang kemudian dapat ditulis seperti berikut:

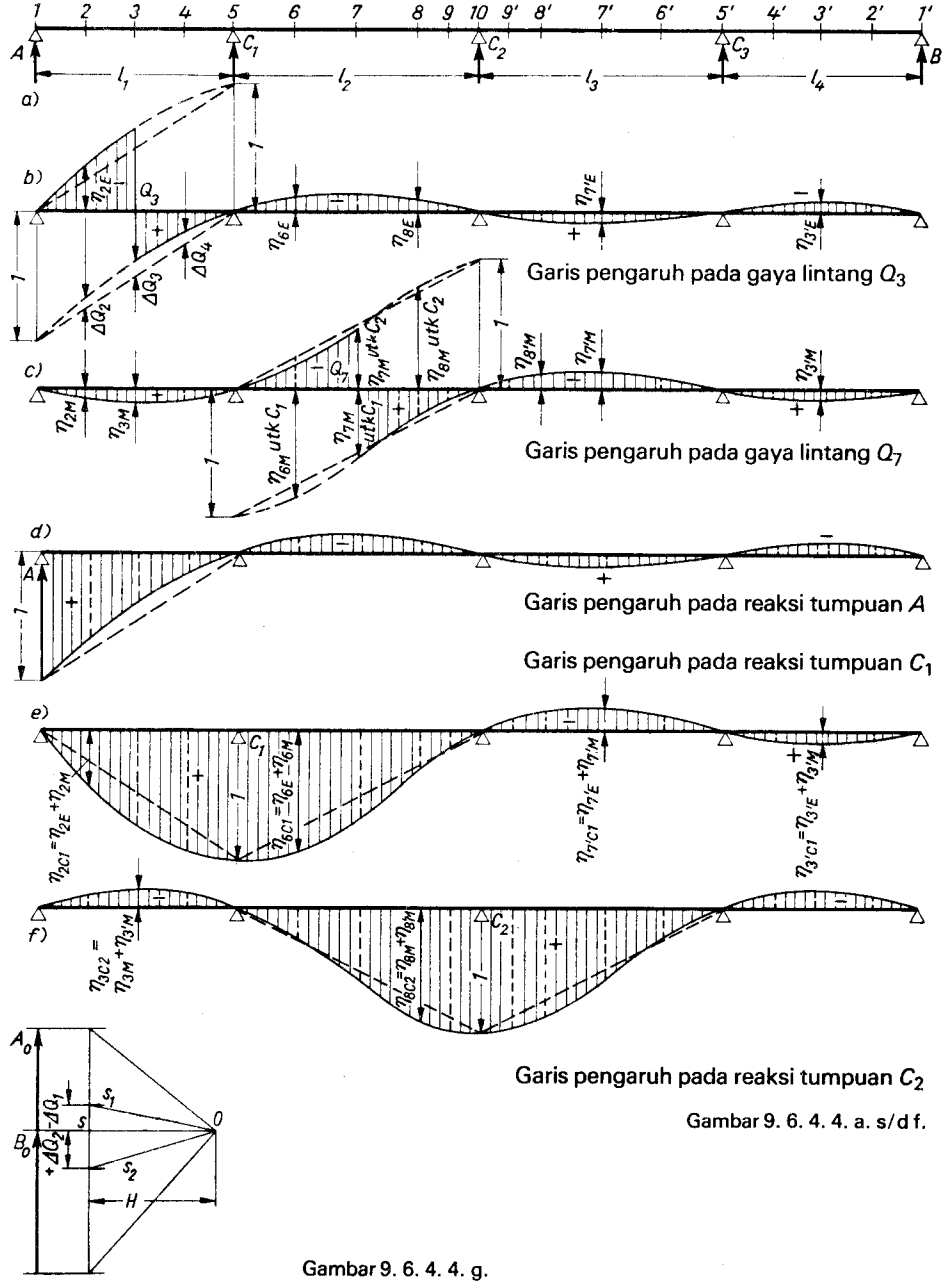
$$Q(R_A) = Q_o(R_{Ao}) + \frac{M_2 - M_1}{l} = Q_o \pm \Delta Q$$

Perbedaan ΔQ dapat kita tentukan secara grafis dengan mudah. Seperti terlihat misalnya pada contoh 2, gambar 6. 3. 3. f. pada gambar gaya dapat kita tentukan dengan suatu garis sejajar dengan garis penutup s yang kena titik kutub, nilai reaksi tumpuan kiri atau kanan. Pada poligon batang tarik menurut gambar 9. 6. 4. 3. a. dan b. garis penurut menjadi garis horisontal. Perbedaan antara garis horisontal dan garis sejajar pada garis penutup masing-masing kiri dan kanan pada suatu tumpuan menentukan nilai ΔQ pada garis pengaruh pada gaya lintang, seperti terlihat pada gambar 9. 6. 4. 4. g. berikut.

Karena pada bagian pertama pada balok terusan ini semua garis penutup naik ke kiri kita terima tambahan-tambahan pada bidang gaya lintang yang positif dan kurangan-kurangan pada bidang gaya lintang yang negatif. Jarak antara dua garis ini selalu harus menjadi 1 (lihat gambar 9. 6. 4. 4. b dan c.).

Karena pada bagian-bagian yang kita perhatikan hanya timbul momen pada tumpuan dapat kita tentukan ordinat-ordinat untuk garis pengaruh dengan mengukur ukuran H (jarak titik kutub pada gambar gaya) dari titik potong J ke kanan atau K ke kiri. Pada titik itu kita dapat mengukur siku-siku pada garis sumbu balok terusan sampai garis penutup masing-masing.

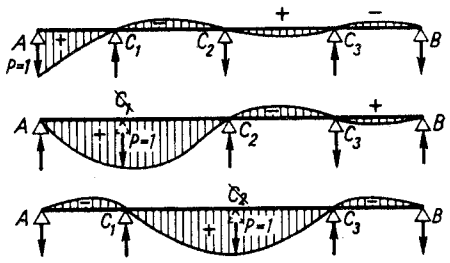
Jarak titik kutub H dapat kita tentukan dengan menggambar garis sejajar dari poligon batang tarik pada bagian balok terusan yang diperhatikan oleh P 1.0 pada ujung-ujung gaya P = 1.0 itu. Jarak H sebenarnya selalu harus menjadi sama karena P = 1.0 juga selalu sama.



Gambar 9. 6. 4. 4. a. s/d f.

Gambar 9. 6. 4. 4. g.

5. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan:
Penentuan garis pengaruh pada reaksi tumpuan menjadi sebetulnya suatu garis pengaruh pada gaya lintang pada suatu titik tumpuan. Garis pengaruh pada reaksi tumpuan sebetulnya juga dapat ditentukan dengan melankaui tumpuan yang diperhatikan, dan memasang suatu gaya $P = 1.0$ yang membebani balok terusan pada titik tumpuan itu. Sekarang kita tentukan garis elastis pada balok terusan itu dan garis elastis ini menjadi garis pengaruh pada reaksi tumpuan itu. (Syarat dari *Land.).*



Garis pengaruh pada reaksi tumpuan A

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan C_1

Garis pengaruh pada reaksi tumpuan C_2

Gambar 9. 6. 4. 5. a.

I Lampiran

I. 1. Rumus-rumus yang penting

I. 1. 1. Rumus-rumus yang penting pada bab 1. Pengetahuan dasar

Nomor:	Uraian rumus:	Halaman:
(1. 1.)	Penghubung antara tegangan yang timbul dan tegangan yang diperbolehkan	20
(1. 2.)	Syarat Hook	20
(1. 3.)	Penentuan dasar suatu gaya P	22
(1. 4.)	Penentuan dasar suatu gaya P	22
(1. 5.)	Hubungan antara nilai dari ilmu ukur dan nilai dari mekanika teknik (statika)	22
(1. 6.)	Penentuan resultante pada dua gaya	24
(1. 7.)	Penentuan resultante pada dua gaya	25
(1. 8.)	Syarat tangkai pengungkit	30
(1. 9.)	Persamaan momen pada gaya yang sejajar	30
(1. 10.)	Penentuan resultante pada beberapa gaya yang tidak sejajar	32
(1. 11.)	Tiga persamaan untuk membagi suatu resultante R atas tiga garis kerja	33
(1. 12.)	Syarat persamaan momen Ritter	34
(1. 13.)	Momen dari satu gaya	35
(1. 14.)	Momen dari kumpulan gaya	36
(1. 15.)	Syarat-syarat keseimbangan gaya	38
(1. 16.)	Syarat-syarat keseimbangan momen	39
(1. 17.)	Syarat-syarat keseimbangan gaya dan momen	39

I. 1. 2. Rumus-rumus yang penting pada bab 2. Ilmu inersia dan ketahanan

(2. 1.)	Ketentuan jarak titik berat pada umumnya	46
(2. 2.)	Ketentuan jarak titik berat pada trapesium	48
(2. 3.)	Penentuan momen lembam pada umumnya	49
(2. 4.)	Penentuan jari-jari lembam pada umumnya	50
(2. 5.)	Momen lembam oleh jari-jari lembam dan F	50

(2. 6.) Momen lembam pada sistim koordinat berpindah 50
(2. 7.) Momen lembam pada sistim koordinat pada titik berat 51
(2. 8.) Momen lembam pada segiempat pada titik berat (x, y) 51
(2. 9.) Momen lembam pada segiempat pada sisi-sisi (x', y') 51
(2. 10.) Momen lembam pada segitiga 51
(2. 11.) Momen lembam pada trapesium pada sisi bawah (x') 52
(2. 12.) Momen lembam pada trapesium pada titik berat (x) 52
(2. 13.) Koordinat u dan v pada sistim koordinat terputar (u, v) 53
(2. 14.) Momen lembam pada sistim koordinat terputar (u, v) 53
(2. 15.) Momen lembam pada sistim koordinat terputar (u, v) 54
(2. 16.) Sudut putar α pada sistim koordinat terputar 54
(2. 17.) Momen lembam utama I_1 dan I_2 55
(2. 18.) Syarat-syarat perseimbangan gaya luar dan gaya dalam 58
(2. 19.) Persamaan penguluran pada potongan yang datar 59
(2. 20.) Tegangan σ pada penguluran yang datar dan E tetap 60
(2. 21.) Persamaan penentuan gaya normal N 60
(2. 22.) Tegangan σ pada sistim koordinat bertitik tangkap pada titik berat 61
(2. 23.) Tegangan σ pada sistim koordinat terkonyungsi 61
(2. 24.) Persamaan garis sumbu nol 61
(2. 25.) Koordinat x_n dan y_n dari garis sumbu nol dengan garis sumbu terkonyungsi 61
(2. 26.) Tegangan σ pada sistim koordinat terkonyungsi 62
(2. 27.) Rumus garis sumbu nol linear 63
(2. 28.) Tegangan σ pada gaya tarik dan gaya tekan 63
(2. 29.) Tegangan σ pada sistim koordinat terkonyungsi 63
(2. 30.) Tegangan σ oleh momen lentur M_x, M_y saja 64
(2. 31.) Tegangan σ oleh momen lentur M_x saja 64
(2. 32.) Tegangan σ_{max} pada sisi atas dan sisi bawah 65
(2. 33.) Penentuan besaran inti k 67
(2. 34.) Syarat keseimbangan tegangan geser 70
(2. 35.) Syarat keseimbangan tegangan geser 71
(2. 36.) Penentuan σ_{max} pada segiempat sejajar 71
(2. 37.) Penentuan σ_{max} pada profil baja berbentuk I 72
(2. 38.) Tegangan linear 74
(2. 39.) Tegangan dalam bidang 77
(2. 40.) Tegangan utama dalam bidang 77
(2. 41.) Hubungan antara gaya tekuk dan lendutan batang tekuk 82
(2. 42.) Penentuan pelengkungan pada batang tekuk 82
(2. 43.) Penentuan pelengkungan pada batang tekuk $\alpha \leqslant 1$ 82
(2. 44.) Penentuan gaya tekan P_{kr} yang bahaya 83
(2. 45.) Penentuan gaya tekan P_{kr} yang bahaya 84
(2. 46.) Penentuan tegangan σ_{kr} yang bahaya 84
(2. 47.) Penentuan tegangan σ_{kr} pada sepenjangkanan plastis pada baja ST 37 85

(2. 48.) Penentuan λ_{id} pada topang ganda konstruksi baja 88
(2. 49.) Penentuan λ_{id} pada topang ganda konstruksi kayu 90
(2. 50.) Penentuan tegangan σ_{max} pada tiang terbengkok 92
(2. 51.) Hubungan antara σ_{tk} yang sebenarnya dan σ_{tk} yang diperbolehkan pada tiang terbengkok 92
(2. 52.) Hubungan antara σ_{tk} yang sebenarnya dan σ_{tk} yang diperbolehkan pada tiang yang tertekan eksentris 93
(2. 53.) Hubungan antara σ_{tk} yang sebenarnya dan σ_{tk} yang diperbolehkan pada tiang dengan beban lintang 95

I. 1. 3. Rumus-rumus yang penting pada bab 3. Konstruksi batang

Nomor: Uraian: halaman:
(3. 1.) Reaksi tumpuan pada balok tunggal dengan satu gaya 103
(3. 2.) Momen maksimal pada balok tunggal dengan satu gaya 103
(3. 3.) Reaksi tumpuan pada balok tunggal dengan gaya pusat 104
(3. 4.) Momen maksimal pada balok tunggal dengan gaya pusat 105
(3. 5.) Reaksi tumpuan pada balok tunggal dengan beberapa gaya 105
(3. 6.) Reaksi tumpuan pada balok tunggal dengan dua gaya P yang simetris 107
(3. 7.) Momen makimal pada balok tunggal dengan dua gaya P yang simetris 107
(3. 8.) Reaksi tumpuan pada balok tunggal dengan beban merata 108
(3. 9.) Momen maksimal pada balok tunggal dengan beban merata 108
(3. 10.) Momen pada titik x sembarang pada balok tunggal dengan beban merata 108
(3. 11.) Momen maksimal pada balok tunggal dengan beban merata terbatas 111
(3. 12.) Momen maksimal pada balok tunggal dengan beban segitiga yang simetris 113
(3. 13.) Momen maksimal pada balok tunggal dengan beban segitiga yang satu hadap saja 114
(3. 14.) Momen maksimal pada konsole dengan satu gaya pada ujung yang bebas 120
(3. 15.) Momen maksimal pada konsole dengan beban merata 121
(3. 16.) Momen maksimal pada konsole dengan gaya horisontal 122
(3. 17.) Gaya normal dan gaya lintang pada balok tunggal yang miring 144
(3. 18.) Tegangan σ_{max} pada balok tunggal dengan lengkungan miring 152
(3. 19.) Momen maksimal yang bercita-cita pada balok rusuk Gerber 155
(3. 20.) Jarak engsel yang bercita-cita pada balok rusuk Gerber 156

I. 1. 4. Rumus-rumus yang penting pada bab 4. Konstruksi rangka batang

(4. 1.) Persamaan keseimbangan pada rangka batang 179
(4. 2.) Penentuan konstruksi rangka batang yang statis tertentu 179
(4. 3.) Penentuan gaya batang tepi atas *O* menurut Ritter 187
(4. 4.) Penentuan gaya batang tepi bawah *U* menurut Ritter 187
(4. 5.) Penentuan gaya batang diagonal *D* menurut Ritter 188

I. 1. 5. Rumus-rumus yang penting pada bab 5. Alat-alat sambungan

(5. 1.) Beban yang diperkenankan satu keling atau baut terhadap tegangan geser 204
(5. 2.) Beban yang diperkenankan satu keling atau baut terhadap tekanan dinding lobang 204
(5. 3.) Gaya lintang Q_{id} pada topang ganda dari baja 223
(5. 4.) Gaya pergeseran T pada topang ganda dari baja 223
(5. 5.) Momen M pada topang ganda dari baja 224
(5. 6.) Tegangan normal σ_h pada gigi tunggal 227
(5. 7.) Tegangan geser τ pada gigi tunggal 227

I. 1. 6. Rumus-rumus yang penting pada bab 6. Balok terusan

Nomor: Uraian rumus: halaman:
(6. 1.) Balok terjepit: persamaan elastis 254
(6. 2.) Balok terjepit: momen jepitan 255
(6. 3.) Balok terjepit: momen jepitan $\alpha = \beta = 0$ 255
(6. 4.) Perhitungan sudut tumpuan oleh $M_1 = 1$ 255
(6. 5.) Perhitungan sudut tumpuan oleh $M_2 = 1$ 256
(6. 6.) Persamaan sudut tumpuan 256
(6. 7.) Balok terjepit: momen jepitan 256
(6. 8.) Balok terjepit: momen jepitan $\alpha = \beta = 0$ 256
(6. 9.) Balok terjepit dengan beban merata: sudut tumpuan 257
(6. 10.) Balok terjepit dengan beban merata: momen jepitan 257
(6. 11.) Balok terjepit dengan gaya pusat: sudut tumpuan 258
(6. 12.) Balok terjepit dengan gaya pusat: momen jepitan 258
(6. 13.) Balok terjepit dengan dua gaya: sudut tumpuan 259
(6. 14.) Balok terjepit dengan dua gaya: momen jepitan 259
(6. 15.) Balok terjepit: menentukan momen pada titik x 260

(6. 16.) Balok terjepit: menentukan gaya lintang 260
(6. 17.) Balok terjepit: menentukan reaksi pada tumpuan 261
(6. 18.) Balok terjepit dengan beban merata: momen maximal 261
(6. 19.) Balok terjepit dengan gaya pusat: momen maximal 261
(6. 20.) Balok terjepit: menentukan lendutan f 262
(6. 21.) Balok terjepit dengan beban merata: lendutan maximal 262
(6. 22.) Balok terjepit dengan gaya pusat: lendutan maximal 263
(6. 23.) Balok terjepit sebelah: momen jepitan kalau $\alpha = 0$ 263
(6. 24.) Balok terjepit sebelah: momen jepitan kalau $\alpha > 0$ 263
(6. 25.) Balok terjepit sebelah dengan beban merata: momen jepitan 264
(6. 26.) Balok terjepit sebelah dengan beban merata: momen maximal 264
(6. 27.) Balok terjepit sebelah dengan beban merata: gaya lintang 264
(6. 28.) Balok terjepit sebelah dengan beban merata: reaksi pada tumpuan 264
(6. 29.) Balok terjepit elastis: momen jepitan 265
(6. 30.) Jarak titik potong a 266
(6. 31.) Jarak titik potong b 267
(6. 32.) Perhitungan momen jepitan dengan jarak titik potong 267
(6. 33.) Perhitungan momen pada titik potong J dan K 268
(6. 34.) Potongan K dan K' pada garis bersilang 268
(6. 35.) Jarak titik potong a dan b dengan I tetap 269
(6. 36.) Perhitungan momen pada titik potong dengan I tetap 269
(6. 37.) Jarak titik potong pada balok terjepit 270
(6. 38.) Jarak titik potong pada balok terjepit dengan I tetap 270
(6. 39.) Jarak titik potong pada balok tunggal 271
(6. 40.) Perhitungan ukuran jepitan sendiri pada jepitan elastis 272
(6. 41.) Perhitungan ukuran jepitan sendiri pada jepitan yang kaku 272
(6. 42.) Perhitungan ukuran jepitan sendiri pada engsel 272
(6. 43.) Perhitungan ukuran jepitan sendiri pada jepitan elastis 273
(6. 44.) Perhitungan ukuran jepitan sendiri pada jepitan elastis 273
(6. 45.) Perhitungan ukuran jepitan asing 273
(6. 46.) Jarak titik potong a' dan b' pada balok terjepit elastis 276
(6. 47.) Jarak titik potong a' dan b' pada balok terjepit 277
(6. 48.) Jarak titik potong a' dan b' pada balok tunggal 277
(6. 49.) Syarat persamaan tiga momen (Clapeyron) 283
(6. 50.) Penentuan angka kekakuan batang k 289
(6. 51.) Perhubungan antara momen distribusi dan angka kekakuan batang 289
(6. 52.) Penentuan koefisien induksi γ 289
(6. 53.) Penentuan koefisien induksi γ pada balok dengan I tetap 290
(6. 54.) Perhitungan momen jepitan pada balok terjepit sebelah 291
(6. 55.) Penentuan angka kekakuan batang k' pada balok terjepit sebelah 291

(6. 56.) Penentuan koefisien induksi γ pada balok terjepit sebelah 292
(6. 57.) Balok terusan dengan beban merata: momen maksimal pada satu bagian 295
(6. 58.) Merendahkan ketinggian puncak momen pada momen yang negatif (−) di atas tumpuan pada konstruksi beton bertulang. 299

I. 1. 7. Rumus-rumus yang penting pada bab 7. Konstruksi portal

(7. 1.) Momen jepitan M_{ik} pada penurunan tumpuan pada balok terjepit 322
(7. 2.) Momen jepitan M_{ik} pada tumpuan pada balok terjepit sebelah 322
(7. 3.) Faktor pengikat $\bar{\mu}$ pada gaya pengikat horisontal pada konstruksi yang goyah 326
(7. 4.) Momen jepitan pada konstruksi yang goyah dengan perhatikan faktor pengikat $\bar{\mu}$ 326
(7. 5.) Perbandingan antara momen jepitan pada konstruksi portal dengan panjangnya kaki berbeda dan yang terjepit pada tumpuannya 329
(7. 6.) Perbandingan antara momen jepitan pada konstruksi portal dengan panjangnya kaki berbeda dan yang berengsel pada tumpuannya 329
(7. 7.) Perbandingan antara momen jepitan pada konstruksi portal dengan panjangnya kaki berbeda dan yang terjepit sebelah dan berengsel menyebelah 330
(7. 8.) Penentuan gaya pengikat horisontal $F_{\mathrm{I}} = 0$ pada konstruksi portal bertingkat pada tingkat satu 333
(7. 9.) Penentuan gaya pengikat horisontal $F_{\mathrm{II}} = 0$ pada konstruksi portal bertingkat pada tingkat dua 333
(7. 10.) Penentuan momen M pada konstruksi portal bertingkat 333

I. 1. 8. Rumus-rumus yang penting pada bab 8. Perubahan bentuk elastis

(8. 1.) Persamaan keseimbangan kerja virtual 344
(8. 2.) Persamaan keseimbangan kerja virtual dengan giliran terbalik 345
(8. 3.) Kerja virtual dalam oleh gaya normal 346
(8. 4.) Kerja virtual dalam oleh momen lentur 347
(8. 5.) Kerja virtual dalam oleh perubahan suhu seragam 347
(8. 6) Kerja virtual dalam oleh suhu yang berbeda pada sisi atas dan sisi bawah 347
(8. 7) Kerja virtual dalam oleh gaya lintang 348
(8. 8) Persamaan kerja pada konstruksi batang 348
(8. 9.) Persamaan kerja yang diperpendekkan pada konstruksi batang 349
(8. 10.) Persamaan kerja pada konstruksi rangka batang 350
(8. 11.) Persamaan kerja yang diperpendekkan pada konstruksi rangka batang 350

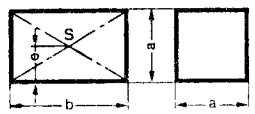
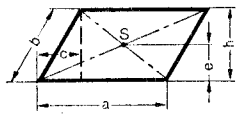
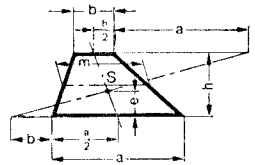
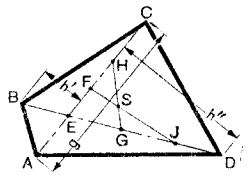
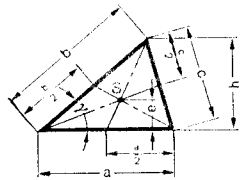
Hasil pengintegralan pada kerja virtual:
(8. 12.) Bidang limas — bidang sembarang 352
(8. 13.) Bidang limas — bidang limas 352
(8. 14.) Bidang limas — bidang segiempat 353
(8. 15.) Bidang segiempat — bidang segiempat 353
(8. 16.) Bidang segitiga — bidang segiempat 353
(8. 17.) Bidang segitiga — bidang segitiga sejajar 354
(8. 18.) Bidang segitiga — bidang segitiga tidak sejajar 354
(8. 19.) Syarat dari Betti 355
(8. 20.) Syarat dari Maxwell 356
(8. 21.) Syarat dari Castigliano 357
(8. 22.) Syarat dari Mohr tentang lengkungan k 357
(8. 23.) Syarat dari Mohr tentang persamaan garis lengkung 357
(8. 24.) Syarat dari Mohr 358
(8. 25.) Pergeseran dan perputaran pada konstruksi batang 359
(8. 26.) Persamaan kerja pada konstruksi rangka batang pada prakteknya 369
(8. 27.) Penentuan bobot-beban W_k pada konstruksi batang 373
(8. 28.) Bobot-beban W_o pada tumpuan kiri 374
(8. 29.) Bobot-beban W_n pada tumpuan kanan 374
(8. 30.) Bobot-beban W_k pada momen lembam I tetap 374
(8. 31.) Bobot-beban W_o pada I tetap, pada tumpuan kiri 374
(8. 32.) Bobot-beban W_n pada I tetap, pada tumpuan kanan 374
(8. 33.) Bobot-beban W_k pada konstruksi rangka batang 381
(8. 34.) Bobot-beban W_k pada konstruksi rangka batang 381
(8. 35.) Bobot-beban W_k pada diagonal yang naik 382
(8. 36.) Bobot-beban W_k pada diagonal yang turun 383
(8. 37.) Bobot-beban W_k pada diagonal yang naik pada konstruksi rangka batang dengan tepi sejajar 383
(8. 38.) Bobot-beban W_k pada diagonal yang turun pada konstruksi rangka batang dengan tepi sejajar 383

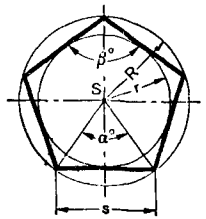
I. 1. 9. Rumus-rumus yang penting pada bab 9. Garis pengaruh

(9. 1.) Reaksi tumpuan oleh kumpulan gaya P dengan garis pengaruh 392
(9. 2.) Reaksi tumpuan oleh beban merata q dengan bidang pengaruh 392
((9. 3.) Luasnya bagian (+) atau bagian (−) pada bidang pengaruh pada beban yang tidak langsung 398
(9. 4.) Luasnya bidang pengaruh seluruhnya pada beban yang tidak langsung 398
(9. 5.) Gaya normal pada titik x pada konstruksi busur tiga ruas dengan beban tetap 416

(9. 6.) Gaya lintang pada titik *x* pada konstruksi busur tiga ruas dengan bebasan tetap 416
(9. 7.) Gaya normal pada titik *x* pada konstruksi busur tiga ruas dengan beban tetap 420
(9. 8.) Gaya lintang pada titik *x* pada konstruksi busur tiga ruas dengan beban tetap 420
(9. 9.) Gaya batang tepi pada konstruksi rangka batang dengan tepi sejajar 421
(9. 10.) Gaya batang diagonal pada konstruksi rangka batang dengan tepi sejajar 425
(9. 11.) Gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan tepi sejajar 425
(9. 12.) Gaya batang tepi pada konstruksi rangka batang dengan tepi tidak sejajar 430
(9. 13.) Gaya batang diagonal pada konstruksi rangka batang dengan tepi tidak sejajar 431
(9. 14.) Gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan diagonal turun naik dan tepi tidak sejajar 433
(9. 15.) Gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan diagonal turun naik dan tepi tidak sejajar 433
(9. 16.) Gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan semua diagonal berarah sesama dan tepi tidak sejajar 434
(9. 17.) Gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan semua diagonal berarah sesama dan tepi tidak sejajar 435
(9. 18.) Gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan semua diagonal naik atau turun dan tepi tidak sejajar 436
(9. 19.) Gaya batang vertikal pada konstruksi rangka batang dengan semua diagonal naik atau turun dan tepi tidak sejajar 436

I. 2. 1. Penentuan titik berat pada bidang yang datar

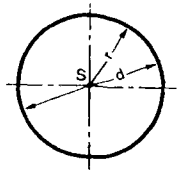
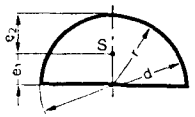
Bentuk	luasnya *F*	jarak titik berat *e*
	Persegi-empat $F = a \cdot b$ dengan sama sisi: $F = a^2$	$e = \frac{a}{2}$
	Jajaran $F = a \cdot h$ $h = \sqrt{b^2 - c^2}$	$e = \frac{h}{2}$
	Trapesium $F = \frac{a+b}{2}\, h = m \cdot h$	$e = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$
	Segiempat sembarang $F = \frac{h' + h''}{2} \cdot g$	*S* pada titik potong garis *FJ* dan *GH*, *F* dan *G* menjadi titik tengah diagonal *AC* dan *BD*, dan jarak *CH* = *AE* dan *DJ* = *BE*.
	Segitiga $F = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ $h = b \cdot \sin\gamma$	$e = \frac{h}{3}$

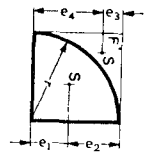
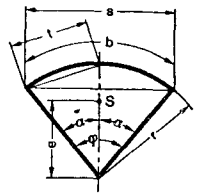
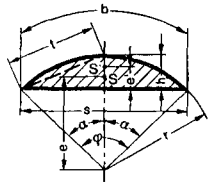
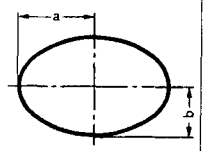
Bentuk	luasnya F	jarak titik berat e
	Segi-banyak sama sisi $F = \frac{n \cdot R^2}{2} \sin\alpha = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{n \cdot s^2}{4} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ n = banyaknya sudut	$\alpha^0 = \frac{360}{n}$ $\quad \beta^0 = 180 - \alpha$ $R = \frac{r}{\cos\frac{180}{n}} = \frac{s}{2\sin\frac{180}{n}}$ $S = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{180}{n}$ $r = R \cdot \cos\frac{180}{n} = \frac{s}{2}\operatorname{ctg}\frac{180}{n}$

n	s		R		r		F			n
3	1,732 R	3,464 r	0,5774s	2 r	0,2887s	0,5	0,4330s²	1,299R²	5,196r²	3
4	1,414 R	2 r	0,7071s	0,414r	0,5 s	0,7071	1 s²	2 R²	4 r²	4
5	1,176 R	1,453 r	0,8506s	1,155r	0,6882s	0,8090	1,772 s²	2,378R²	3,633r²	5
6	1 R	1 r	1 s	1,155r	0,8660s	0,8600	2,598 s²	2,599R²	3,464r²	6
7	0,8678R	0,9631r	1,152 s	1,110r	1,038 s	0,9010	3,634 s²	2,736R²	3,371r²	7
8	0,7654R	0,8284r	1,307 s	1,082r	1,207 s	0,9239	4,828 s²	2,828R²	3,314r²	8
9	0,6840R	0,7279r	1,462 s	1,064r	1,374 s	0,9397	6,182 s²	2,893R²	3,276r²	9
10	0,6180R	0,6498r	1,618 s	1,051r	1,539 s	0,9511	7,694 s²	2,939R²	3,246r²	10
11	0,5635R	0,5873r	1,775 s	1,042r	1,703 s	0,9595	9,366 s²	2,974R²	3,230r²	11
12	0,5176R	0,5359r	1,932 s	1,035r	1,866 s	0,9659	11,20 s²	3 R²	3,215r²	12
17	0,3902R	0,3979r	2,563 s	1,020r	2,514 s	0,9809	20,11 s²	3,061R²	3,183r²	16
20	0,3129R	0,3167r	2,563 s	2,563r	1,012 s	0,9877	31,57 s²	3,090R²	3,168r²	20

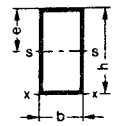
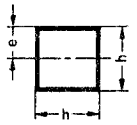
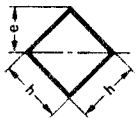
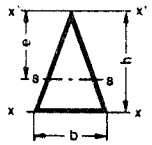
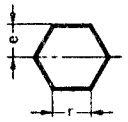
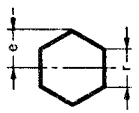
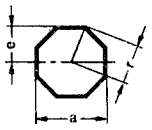
contoh 1: n = 5 s = 30 mm
R = 0,8506 · 30 = 25,52 mm
r = 0,6882 · 30 = 20,65 mm
F = 1,720 · 30² = 1548 mm²

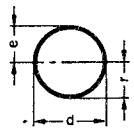
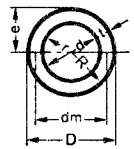
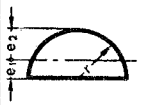
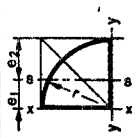
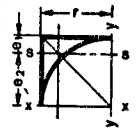
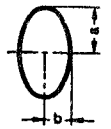
contoh 2: n = 12 R = 75 mm
r = 0,9659 · 75 = 72,44 mm
s = 0,5176 · 75 = 38,82 mm
F = 3 · 75² = 16875 mm²

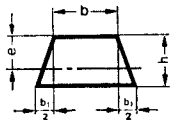
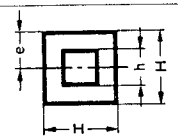
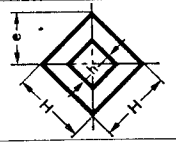
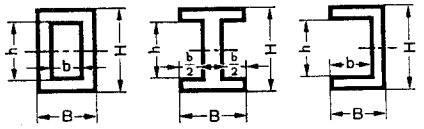
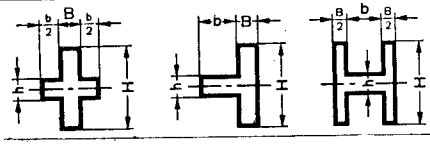
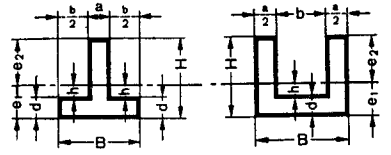
	Lingkaran $F = r^2 \cdot \pi = d^2 \frac{\pi}{4} = \frac{u \cdot d}{4}$	
	Setengah lingkaran $F = \frac{r^2 \cdot \pi}{2} = d^2 \frac{\pi}{8}$	$e_1 = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}4244\,r$ $e_2 = \frac{3\pi - 4}{3\pi} = 0{,}5756\,r$

Bentuk	luasnya F	jarak titik berat e
	seperempat lingkaran $F = \frac{r^2 \cdot \pi}{4}$ luasnya F': $F' = r^2(1 - \frac{\pi}{4}) = 0{,}2146\,r^2$	$e_1 = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}4244\,r$ $\quad e_2 = \frac{3\pi-4}{3\pi} r = 0{,}5756\,r$ $e_3 = \frac{10-3\pi}{12-3\pi} r = 0{,}2234\,r$ $\quad e_4 = \frac{2}{12-3\pi} r = 0{,}7766\,r$
	Sektor lingkaran $F = \frac{r \cdot b}{2} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi^0}{360} = 0{,}0087266 \cdot \varphi^0 \cdot r^2$ $b = \frac{2 \cdot F}{r} = \frac{r \cdot \varphi^0 \cdot \pi}{180} = 0{,}017453 \cdot r \cdot \varphi^0$ $\approx \frac{8t - s}{3}$ $\begin{cases} \varphi < 90^0 \\ \varphi < 150^0 \end{cases}$ $\varphi^0 = \frac{180b}{\pi r} = 57{,}296\frac{b}{r}$	$e = \frac{2}{3} r \frac{s}{b} = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} = \frac{r^2 \cdot s}{3 \cdot F}$ sektor 60⁰: $e = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366\,r$ sektor 90⁰: $e = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0{,}6002\,r$
	segmen lingkaran $F = \frac{r^2}{2}(\frac{\varphi^0 \cdot \pi}{180} - \sin\varphi) = \frac{r(b-s)+s \cdot h}{2}$ $r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}$ $b = \frac{r \cdot \varphi^0 \cdot \pi}{180} = 0{,}017453\,r \cdot \varphi^0$ $s = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = 2\sqrt{h(2r-h)}$ $h = r(1 - \cos\frac{\varphi}{2}) = r - \sqrt{r - (\frac{s}{2})^2}$	$e = \frac{s^3}{12\,F} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r^3 \cdot \sin^3\alpha}{F}$ $\operatorname{tg}\alpha \approx \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2(r-h)}$
	Elips $F = a \cdot b \cdot \pi$ $u \approx \pi(3\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}) \approx \quad \approx 4a = \frac{2b^2}{a}(\ln\frac{4a}{b} - \frac{1}{2})$	

I. 2. 2. Penentuan momen lembam dan momen tahanan

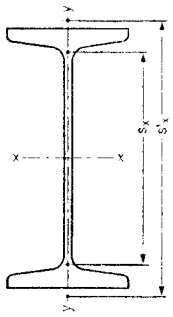
Bentuk	Momen lembam I	Momen tahanan W
	$I_s = \frac{b\,h^3}{12}$ $I_x = \frac{b\,h^3}{3}$	$\frac{b\,h^2}{6}$
	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6}$
		$\frac{\sqrt{2}}{12}\,h^3$ $= 0{,}11785\,h^3$ $e = \frac{h}{2}\sqrt{2}$
	$I_s = \frac{b\,h^3}{36}$ $I_x = \frac{b\,h^3}{12}$ $I_{x'} = \frac{b\,h^3}{4}$	$\frac{b\,h^2}{24}$ $e = \frac{2}{3}\,h$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16}\,r^4$ $= 0{,}5413\,r^4$ $F = 2{,}598\,r^2$	$\frac{5}{8}\,r^3 = 0{,}625 r^3$ $e = r\sqrt{\frac{3}{4}}$ $= 0{,}866\,r$
		$\frac{5\sqrt{3}}{16}\,r^3$ $= 0{,}5413\,r^3$ $e = r$
	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6}\,r^4$ $= 0{,}6381\,r^4$ $= 0{,}8758\,e^4$ $= 0{,}0547\,a^4$	$0{,}6906\,r^3$ $= 0{,}8758\,e^3$ $= 0{,}1095\,a^3$ $e = 0{,}924\,r$

Bentuk	Momen lembam I	Momen tahanan W
	$\frac{\pi\,d^4}{64}$ $= \frac{\pi\,r^4}{4}$ $= 0{,}7854\,r^4$ $\approx 0{,}05\,d^4$	$\frac{\pi\,d^3}{32}$ $= \frac{\pi\,r^3}{4}$ $= 0{,}7854\,r^3$ $\approx 0{,}1\,d^3$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$ $= \frac{\pi}{4}(R^4-r^4)$	$\frac{\pi}{32}\,\frac{D^4-d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4}\,\frac{R^4-r^4}{R}$
Pada pipa dengan dinding yang tipis: $W = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{d_m^3\cdot t}{D}\left[1+\left(\frac{t}{d_m}\right)^2\right]$ $I = W\cdot R$		
	$0{,}1098\,r^4$	$W_1 = 0{,}2587\,r^3$ $W_2 = 0{,}1908\,r^3$ $e_1 = 0{,}4244\,r$ $e_2 = 0{,}5756\,r$
	$I_s = 0{,}0549\,r^4$ $I_x \} \approx 0{,}1963\,r^4$ $I_y \}$ $I_{xy} = 0{,}125\,r^4$ $I_{ss} = 0{,}0165\,r^4$	$e_1 = 0{,}4244\,r$ $e_2 = 0{,}5756\,r$
	$I_s = 0{,}0075\,r^4$ $I_x \} \approx 0{,}137\,r^4$ $I_y \}$ $I_{xy} = 0{,}125\,r^4$ $I_{ss} \approx 0{,}0044\,r^4$	$e_1 = 0{,}2234\,r$ $e_2 = 0{,}7766\,r$
	$\frac{\pi}{4}\,b\,a^3$ $= 0{,}7854\,b\,a^3$	$\frac{\pi}{4}\,b\,a^2$ $= 0{,}7854\,b\,a^2$

Bentuk	momen lembam I	momen tahanan W
	$I = \frac{h^3}{36}\,\frac{6\,b^2+6\,b\,b_1+b_1^2}{2\,b+b_1}$	$\frac{h^2}{12}\,\frac{6\,b^2+6\,b\,b_1+b_1^2}{3\,b+2\,b_1}$ $e = \frac{h}{3}\,\frac{3\,b+2\,b_1}{2\,b+b_1}$
	$\frac{H^4-h^4}{12}$	$\frac{H^4-h^4}{6\,H}$
		$\sqrt{2}\,\frac{H^4-h^4}{12\,H} = 0{,}1179\,\frac{H^4-h^4}{H}$ $e = \frac{H}{2}\sqrt{2}$
		$I = \frac{B\,H^3-b\,h^3}{12}$ $\quad W = \frac{B\,H^3-b\,h^3}{6\,H}$
		$I = \frac{B\,H^3+b\,h^3}{12}$ $\quad W = \frac{B\,H^3+b\,h^3}{6\,H}$
		$I = \frac{B\,e_1^3-b\,h^3+a\,e_2^3}{3}$ $\quad W_1 = \frac{I}{e_1}$ $e_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\,H^2+b\,d^2}{a\,H+b\,d}$ $\quad W_2 = \frac{I}{e_2}$ $e_2 = H - e_1$

I. 2. 3. Tabel nilai-nilai pada bahan baja profil masing-masing

1. 2. 3. 1. Tabel nilai-nilai profil baja I NP



S_x = momen statis pada separuh luasnya profil

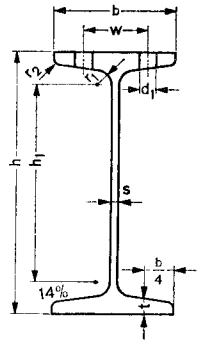
$S_x = \frac{I_x}{S_x}$ jarak titik berat pada bagian tarik dan tekan

$S'_x = \frac{I_x}{S'_x} = \frac{\text{momen lembam}}{\text{momen statis pada sayap}}$

I_t = momen lembam $= \frac{1{,}31}{3}[2b \cdot t^3 + (h - 2t)\, s^3]$

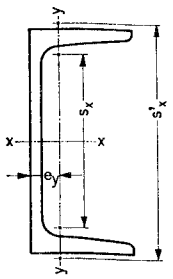
torsi menurut
rumus A. Föppl

Bentuk	ukuran-ukuran					berat		garis sumbu x-x		
	h	b	$s = r_1$	t	r_2	F	g	I_x	W_x	i_x
I	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm
4½	45	35	3,5	5	2,1	4,7	3,7	15,3	6,8	1,8
6	60	40	3,75	5	2,3	5,9	4,6	34,1	11,4	2,4
8	80	42	3,9	5,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20
10	100	50	4,5	6,8	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01
12	120	58	5,1	7,7	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81
14	140	66	5,7	8,6	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61
16	160	74	6,3	9,5	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40
18	180	82	6,9	10,4	4,1	27,9	21,9	1 450	161	7,20
20	200	90	7,5	11,3	4,5	33,5	26,3	2 140	214	8,00
22	220	98	8,1	12,2	4,9	39,6	31,1	3 060	278	8,80
24	240	106	8,7	13,1	5,2	46,1	36,2	4 250	354	9,59
25	250	110	9	13,6	5,4	49,7	39,0	4 970	397	10,0
26	260	113	9,4	14,1	5,6	53,4	41,9	5740	442	10,4
28	280	119	10,1	15,2	6,1	61,1	48,0	7 590	542	11,1
30	300	125	10,8	16,2	6,5	69,1	54,2	9 800	653	11,9
32	320	131	11,5	17,3	6,9	77,8	61,1	12 510	782	12,7
34	340	137	12,2	18,3	7,3	86,8	68,1	15 700	923	13,5
36	360	143	13	19,5	7,8	97,1	76,2	19 610	1090	14,2
38	380	149	13,7	20,5	8,2	107	84,0	24 010	1260	15,0
40	400	155	14,4	21,6	8,6	118	92,6	29 210	1460	15,7
42½	425	163	15,3	23	9,2	132	104	36 970	1740	16,7
45	450	170	16,2	24,3	9,7	147	115	45 850	2040	17,7
47½	475	178	17,1	25,6	10,3	163	128	56 480	2380	18,6
50	500	185	18	27,0	10,8	180	141	68 740	2750	19,6
55	550	200	19	30	11,9	213	167	99 180	3610	21,6
60	600	215	21,6	32,4	13	254	199	139 000	4630	23,4



garis sumbu y-y							lobang				bentuk
I_y	W_y	i_y	S_x	s_x	s'_x	I_t	w	d_1 max	h_1	U	
cm^4	cm^3	cm	cm^3	cm	cm	cm^4	mm	mm	mm	m^2/m	I
3,6	2,0	0,87	4,23	3,62	3,94	0,488	.	.	28	0,210	4½
5,9	3,0	0,96	6,79	5,02	5,68	0,552	.	.	41	0,257	6
6,29	3,00	0,91	11,4	6,84	6,93	0,928	22	.	59	0,304	8
12,2	4,88	1,07	19,9	8,57	10,2	1,72	26	.	75	0,370	10
21,5	7,41	1,23	31,8	10,3	12,4	2,92	30	.	92	0,439	12
35,2	10,7	1,40	47,7	12,0	14,6	4,66	34	11	109	0,502	14
54,7	14,8	1,55	68,0	13,7	16,8	7,08	38	14	125	0,575	16
81,3	19,8	1,71	93,4	15,5	19,1	10,3	44	14	142	0,640	18
117	26,0	1,87	125	17,2	21,1	14,6	46	17	159	0,709	20
162	33,1	2,02	162	18,9	23,4	20,1	52	17	175	0,775	22
221	41,7	2,20	206	20,6	25,-	27,0	56	17	192	0,844	24
256	46,5	2,27	231	21,5	26,7	31,3	58	17	200	0,877	25
288	51,0	2,32	257	22,3	27,8	36,1	58	20	208	0,906	26
364	61,2	2,45	316	24,0	30,1	47,8	62	20	225	0,966	28
451	72,2	2,56	381	25,7	32,4	61,2	64	20	241	1,03	30
555	84,7	2,67	457	27,4	34,6	78,2	70	20	257	1,09	32
674	98,4	2,80	540	29,1	36,9	97,5	74	20	274	1,15	34
818	114	2,90	638	30,7	39,1	123	74	23	290	1,21	36
975	131	3,02	741	32,4	41,4	150	80	23	306	1,27	38
1160	149	3,13	857	34,1	43,6	183	84	23	323	1,33	40
1440	176	3,30	1020	36,2	46,5	233	86	26	343	1,41	42½
1730	203	3,43	1200	38,3	49,1	288	92	26	363	1,48	45
2090	235	3,60	1400	40,4	52,1	354	96	26	384	1,55	47½
2480	268	3,72	1620	42,4	54,6	449	100	26	404	1,63	50
3490	349	4,02	2120	46,8	60,0	618	110	26	444	1,80	55
4670	434	4,30	2730	50,9	66,5	875	120	26	485	1,92	60

1. 2. 3. 2. Tabel nilai-nilai profil baja U NP



S_x = momen statis pada separuh luasnya profil

$S_x = \frac{I_x}{S_x}$ jarak titik berat pada bagian tarik dan tekan

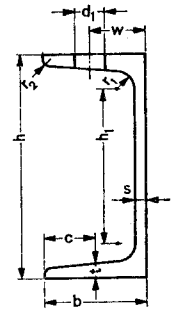
$S'_x = \frac{I_x}{S'_x} = \frac{\text{tekan momen lembam}}{\text{momen statis pada sayap}}$

I_t = momen lembam = $\frac{1{,}12}{3}$ $[2b \cdot t^3 + (h-2t)\, s^3]$

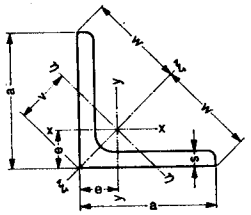
torsi menurut rumus A. Föppl

a = jarak yang menentukan $I_{x2} = I_y 2 = 2I \cdot$ pada dua prosil baja U NP

Bentuk	ukuran-ukuran						berat		garis sumbu x-x		
	h	b	s	$t = r_1$	r_2	F	g	e_y	I_x	W_x	i_x
E	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm	cm^4	cm^3	cm
8	80	45	6	8	4	11,0	8,64	1,45	106	26,5	3,10
10	100	50	6	8,5	4,5	13,5	10,6	1,55	206	41,2	3,91
12	120	55	7	9	4,5	17,0	13,4	1,60	364	60,7	4,62
14	140	60	7	10	5	20,4	16,0	1,75	605	86,4	5,45
16	160	65	7,5	10,5	5,5	24,0	18,8	1,84	925	116	6,21
18	180	70	8	11	5,5	28,0	22,0	1,92	1 350	150	6,95
20	200	75	8,5	11,5	6	32,2	25,3	2,01	1 910	191	7,70
22	220	80	9	12,5	6,5	37,4	29,4	2,14	2 690	245	8,48
24	240	85	9,5	13	6,5	42,3	33,2	2,23	3 600	300	9,22
26	260	90	10	14	7	48,3	37,9	2,36	4 820	371	9,99
28	280	95	10	15	7,5	53,3	41,8	2,53	6 280	448	10,9
30	300	100	10	16	8	58,8	46,2	2,70	8 030	535	11,7
32	320	100	14	17,5	8,75	75,8	59,5	2,60	10 870	679	12,1
35	350	100	14	16	8	77,3	60,6	2,40	12 840	734	12,9
38	381	102	13,3	16	11,2	79,7	62,6	2,35	15 730	826	14,1
40	400	110	14	18	9	91,5	71,8	2,65	20 350	1 020	14,9
E F	Profil baia dengan ukuran khusus bangunan										
14	140	40	4	6	3	9,90	7,78	1,02	285	40,6	5,36
E W	Profil baja dengan ukuran knusus kereta api										
105 · 65	105	65	8	8	4	17,3	13,6	1,88	287	54,7	4,07
145 · 60	145	60	8	8	4	19,8	15,6	1,50	585	80,7	5,43
235 · 90	235	90	10	12	6	42,4	33,3	2,28	3 430	292	9,00
300 · 75	300	75	10	10	5	42,8	33,6	1,50	4 930	328	10,7
300 · 78	300	78	10	13	6,5	47,6	37,4	1,80	5 860	393	11,1



garis sumbu y-y									lobang				bentuk
I_y	W_y	i_y	S_x	s_x	s'_x	I_t	a1	a	w	d_1 max	h_1	U	
cm^4	cm^3	cm	cm^3	cm	cm	cm^4	mm	mm	mm	mm	mm	m^2/m	**E**
19,4	6,36	1,33	15,9	6,65	7,41	2,24	28	–	25	14	46	0,312	**8**
29,3	8,49	1,47	24,5	8,42	9,61	2,96	42	104	30	14	64	0,372	**10**
43,2	11,1	1,59	36,3	10,0	12,0	4,30	56	120	30	17	82	0,434	**12**
62,7	14,8	1,75	51,4	11,8	14,1	6,02	70	140	35	17	98	0,489	**14**
85,3	18,3	1,89	68,8	13,3	16,4	7,81	82	156	35	20	115	0,546	**16**
114	22,4	2,02	89,6	15,1	18,8	9,98	96	174	40	20	133	0,611	**18**
148	27,0	2,14	114	16,8	21,3	12,6	108	190	40	23	151	0,661	**20**
197	33,6	2,30	146	18,5	23,5	17,0	122	208	45	23	167	0,718	**22**
248	39,6	2,42	179	20,1	25,9	20,8	134	224	45	26	184	0,775	**24**
317	47,7	2,56	221	21,8	28,2	23,7	146	240	50	26	200	0,834	**26**
399	57,2	2,74	266	23,6	30,2	33,2	160	262	50	26	216	0,890	**28**
495	67,8	2,90	316	25,4	32,3	40,6	174	282	55	26	232	0,950	**30**
597	80,6	2,81	413	26,3	35,4	69,2	182	286	55	26	246	0,982	**32**
570	75,0	2,72	459	28,6	40,2	63,2	204	300	55	26	282	1,05	**35**
613	78,4	2,78	505	31,1	45,9	62,1	230	324	55	26	312	1,11	**38**
846	102	3,04	618	32,9	46,9	85,2	240	346	60	26	324	1,18	**40**
Profil baja dengan ukuran khusus bangunan													**E F**
12,5	4,21	1,12	24,2	11,8	16,0	1,10	86	124	22	11	114	0,419	**14**
Profil baja dengan ukuran khusus bangunan													**E W**
61,2	13,2	1,88	32,6	8,80	10,4	4,18	36	112	35	20	70	0,436	**105 · 65**
53,6	11,9	1,65	49,2	11,9	15,8	4,76	68	128	35	17	111	0,494	**145 · 60**
272	40,5	2,53	175	19,2	25,8	19,5	98	188	50	26	183	0,785	**235 · 90**
145	24,2	1,84	204	24,1	40,6	16,1	182	242	40	23	257	0,857	**300 · 75**
209	34,7	2,10	237	24,7	36,1	23,0	182	254	40	23	245	0,868	**300 · 78**



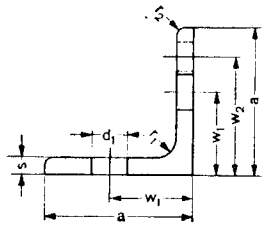
I. 2. 3. 3. Tabel nilai-nilai profil baja L

I_{xy} = momen sentrifugal

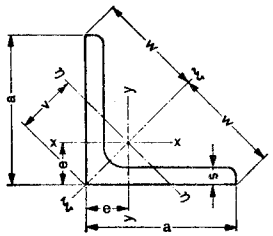
I_t = momen lembam = $\frac{0{,}99}{3}(2a-s)\,s^3$
torsi menurut rumus A. Föppel

$r_2 \cong \frac{r_1}{2}$

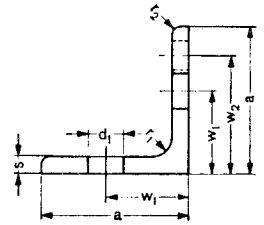
Bentuk L a · a · s	r_1	F	berat g	jarak garis sumbu e	w	v	garis sumbu x-x dan y-y I_x	W_x	i_x
mm	mm	cm²	kg/m	cm	cm	cm	cm⁴	cm³	cm
15 · 15 · 3	3,5	0,82	0,64	0,48	1,06	0,67	0,15	0,15	0,43
4		1,05	0,82	0,51		0,73	0,19	0,19	0,42
20 · 20 · 3	3,5	1,12	0,88	0,60	1,41	0,85	0,39	0,28	0,59
4		1,45	1,14	0,64		0,90	0,48	0,35	0,58
25 · 25 · 3	3,5	1,42	1,12	0,73	1,77	1,03	0,79	0,45	0,75
4		1,85	1,45	0,76		1,08	1,01	0,58	0,74
5		2,26	1,77	0,80		1,13	1,18	0,69	0,72
30 · 30 · 3	5	1,74	1,36	0,84	2,12	1,18	1,41	0,65	0,90
4		2,27	1,78	0,89		1,24	1,81	0,86	0,89
5		2,78	2,18	0,92		1,30	2,16	1,04	0,88
35 · 35 · 4	5	2,67	2,10	1,00	2,47	1,42	2,96	1,18	1,05
6		3,87	3,04	1,08		1,53	4,14	1,71	1,04
40 · 40 · 4	6	3,08	2,42	1,12	2,83	1,58	4,48	1,56	1,21
5		3,79	2,97	1,16		1,64	5,43	1,91	1,20
6		4,48	3,52	1,20		1,70	6,33	2,26	1,19
45 · 45 · 5	7	4,30	3,38	1,28	3,18	1,81	7,83	2,43	1,35
7		5,86	4,60	1,36		1,92	10,4	3,31	1,33
50 · 50 · 5	7	4,80	3,77	1,40	3,54	1,98	11,0	3,05	1,51
6		5,69	4,47	1,45		2,04	12,8	3,61	1,50
7		6,56	5,15	1,49		2,11	14,6	4,15	1,49
9		8,24	6,47	1,56		2,21	17,9	5,20	1,47
55 · 55 · 6	8	6,31	4,95	1,56	3,89	2,21	17,3	4,40	1,66
8		8,23	6,46	1,64		2,32	22,1	5,72	1,64
10		10,1	7,90	1,72		2,43	26,3	6,97	1,62
60 · 60 · 6	8	6,91	5,42	1,69	4,24	2,39	22,8	5,29	1,82
8		9,03	7,09	1,77		2,50	29,1	6,88	1,80
10		11,1	8,69	1,85		2,62	34,9	8,41	1,78
65 · 65 · 7	9	8,70	6,83	1,85	4,60	2,62	33,4	7,18	1,96
9		11,0	8,62	1,93		2,73	41,3	9,04	1,94
11		13,2	10,3	2,00		2,83	48,8	10,8	1,91
70 · 70 · 7	9	9,40	7,38	1,97	4,95	2,79	42,4	8,43	2,12
9		11,9	9,34	2,05		2,90	52,6	10,6	2,10
11		14,3	11,2	2,13		3,01	61,8	12,7	2,08
75 · 75 · 7	10	10,1	7,94	2,09	5,30	2,95	52,4	9,67	2,28
8		11,5	9,03	2,13		3,01	58,9	11,0	2,26
10		14,1	11,1	2,21		3,12	71,4	13,5	2,25
12		16,7	13,1	2,29		3,24	82,4	15,8	2,22



$\xi-\xi$ I_ξ	i_ξ	$\eta-\eta$ I_η	i_η	I_{xy}	I_t	lobang w_1	w_2	d_1	U	bentuk L a · a · s
cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm⁴	mm	mm	mm	m²/m	mm
115	3,06	29,6	1,55	42,7	2,57	45	—	20	0,311	**80 · 80 · 8**
139	3,03	35,9	1,54	51,6	4,95			23		**10**
161	3,00	43,0	1,53	59,0	8,44			23		**12**
181	2,96	48,6	1,54	66,4	13,2			23		**14**
184	3,45	47,8	1,76	68,2	4,11	50	—	23	0,351	**90 · 90 · 9**
218	3,41	57,1	1,75	80,9	7,42			23		**11**
250	3,39	65,9	1,74	92,1	12,1			26		**13**
280	3,82	73,3	1,95	104	6,27	55	—	23	0,390	**100 · 100 · 10**
328	3,80	86,2	1,95	121	10,7			23		**12**
372	3,77	98,3	1,94	137	16,8			26		**14**
379	4,23	98,6	2,16	140	6,93	50	70	23	0,430	**110 · 110 · 10**
444	4,21	116	2,15	164	11,9			23		**12**
505	4,18	133	2,14	186	18,7			26		**14**
541	4,62	140	2,35	201	10,1	50	80	23	0,469	**120 · 120 · 11**
625	4,59	162	2,34	232	16,5			26		**13**
705	4,56	186	2,34	260	25,1			26		**15**
750	5,00	194	2,54	278	14,1	50	90	23	0,508	**130 · 130 · 12**
857	4,97	223	2,53	317	22,3			26		**14**
959	4,94	251	2,52	354	33,0			26		**16**
1010	5,38	262	2,74	376	19,4	55	100	26	0,547	**140 · 140 · 13**
1150	5,36	298	2,73	425	29,5					**15**
1280	5,33	334	2,72	471	42,6					**17**
1340	5,77	347	2,94	498	25,9	55	110	26	0,586	**150 · 150 · 14**
1510	5,74	391	2,93	558	38,4					**16**
1670	5,70	438	2,93	612	54,3					**18**
1750	6,15	453	3,14	648	34,0	60	115	26	0,625	**160 · 160 · 15**
1950	6,13	506	3,13	722	49,1					**17**
2140	6,10	558	3,12	791	68,1					**19**
2690	6,96	679	3,50	1000	46,5	60	135	26	0,705	**180 · 180 · 16**
2970	6,93	757	3,49	1110	65,8					**18**
3260	6,90	830	3,49	1210	89,8					**20**
3740	7,78	943	3,91	1400	51,9	65	150	26	0,785	**200 · 200 · 16**
4150	7,75	1050	3,90	1550	73,5					**18**
4540	7,72	1160	3,89	1690	100					**20**



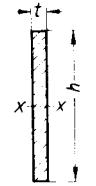
Bentuk ⌞ a · a · s	r_1	F	berat g	jarak garis sumbu e	w	v	garis sumbu x-x dan y-y I_x	W_x	i_x
mm	mm	cm²	kg/m	cm	cm	cm	cm⁴	cm³	cm
80 · 80 · 8	10	12,3	9,66	2,26	5,66	3,20	72,3	12,6	2,42
10		15,1	11,9	2,34		3,31	87,5	15,5	2,41
12		17,9	14,1	2,41		3,41	102	18,2	2,39
14		20,6	16,1	2,48		3,51	115	20,8	2,36
90 · 90 · 9	11	15,5	12,2	2,54	6,36	3,59	116	18,0	2,74
11		18,7	14,7	2,62		3,70	138	21,6	2,72
13		21,8	17,1	2,70		3,81	158	25,1	2,69
100 · 100 · 10	12	19,2	15,1	2,82	7,07	3,99	177	24,7	3,04
12		22,7	17,8	2,90		4,10	207	29,2	3,02
14		26,2	20,6	2,98		4,21	235	33,5	3,00
110 · 110 · 10	12	21,2	16,6	3,07	7,78	4,34	239	30,1	3,36
12		25,1	19,7	3,15		4,45	280	35,7	3,34
14		29,0	22,8	3,21		4,54	319	41,0	3,32
120 · 120 · 11	13	25,4	19,9	3,36	8,49	4,75	341	39,5	3,66
13		29,7	23,3	3,44		4,86	394	46,0	3,64
15		33,9	26,6	3,51		4,96	446	52,5	3,63
130 · 130 · 12	14	30,0	23,6	3,64	9,19	5,15	472	50,4	3,97
14		34,7	27,2	3,72		5,26	540	58,2	3,94
16		39,3	30,9	3,80		5,37	605	65,8	3,92
140 · 140 · 13	15	35,0	27,5	3,92	9,90	5,54	638	63,3	4,27
15		40,0	31,4	4,00		5,66	723	72,3	4,25
17		45,0	35,3	4,08		5,77	805	81,2	4,23
150 · 150 · 14	16	40,3	31,6	4,21	10,6	5,95	845	78,2	4,58
16		45,7	35,9	4,29		6,07	949	88,7	4,56
18		51,0	40,1	4,36		6,17	1050	99,3	4,54
160 · 160 · 15	17	46,1	36,2	4,49	11,3	6,35	1100	95,6	4,88
17		51,8	40,7	4,57		6,46	1230	108	4,86
19		57,5	45,1	4,65		6,58	1350	118	4,84
180 · 180 · 16	18	55,4	43,5	5,02	12,7	7,11	1680	130	5,51
18		61,9	48,6	5,10		7,22	1870	145	5,49
20		68,4	53,7	5,18		7,33	2040	160	5,47
200 · 200 · 16	18	61,8	48,5	5,52	14,1	7,80	2340	162	6,15
18		69,1	54,3	5,60		7,92	2600	181	6,13
20		76,4	59,9	5,68		8,04	2850	199	6,11



I_ξ	i_ξ	I_η	i_η	I_{xy}	I_t	lobang w_1	w_2	d_1	U	bentuk ⌞ a · a · s
$\xi - \xi$		$\eta - \eta$								
cm⁴	cm	cm⁴	cm	cm⁴	cm⁴	mm	mm	mm	m²/m	mm
115	3,06	29,6	1,55	42,7	2,57	45	—	20	0,311	**80 · 80 · 8**
139	3,03	35,9	1,54	51,6	4,95			23		**10**
161	3,00	43,0	1,53	59,0	8,44			23		**12**
181	2,96	48,6	1,54	66,4	13,2			23		**14**
184	3,45	47,8	1,76	68,2	4,11	50	—	23	0,351	**90 · 90 · 9**
218	3,41	57,1	1,75	80,9	7,42			23		**11**
250	3,39	65,9	1,74	92,1	12,1			26		**13**
280	3,82	73,3	1,95	104	6,27	55	—	23	0,390	**100 · 100 · 10**
328	3,80	86,2	1,95	121	10,7			23		**12**
372	3,77	98,3	1,94	137	16,8			26		**14**
379	4,23	98,6	2,16	140	6,93	50	70	23	0,430	**110 · 110 · 10**
444	4,21	116	2,15	164	11,9			23		**12**
505	4,18	133	2,14	186	18,7			26		**14**
541	4,62	140	2,35	201	10,1	50	80	23	0,469	**120 · 120 · 11**
625	4,59	162	2,34	232	16,5			26		**13**
705	4,56	186	2,34	260	25,1			26		**15**
750	5,00	194	2,54	278	14,1	50	90	23	0,508	**130 · 130 · 12**
857	4,97	223	2,53	317	22,3			26		**14**
959	4,94	251	2,52	354	33,0			26		**16**
1010	5,38	262	2,74	376	19,4	55	100	26	0,547	**140 · 140 · 13**
1150	5,36	298	2,73	425	29,5					**15**
1280	5,33	334	2,72	471	42,6					**17**
1340	5,77	347	2,94	498	25,9	55	110	26	0,586	**150 · 150 · 14**
1510	5,74	391	2,93	558	38,4					**16**
1670	5,70	438	2,93	612	54,3					**18**
1750	6,15	453	3,14	648	34,0	60	115	26	0,625	**160 · 160 · 15**
1950	6,13	506	3,13	722	49,1					**17**
2140	6,10	558	3,12	791	68,1					**19**
2690	6,96	679	3,50	1000	46,5	60	135	26	0,705	**180 · 180 · 16**
2970	6,93	757	3,49	1110	65,8					**18**
3260	6,90	830	3,49	1210	89,8					**20**
3740	7,78	943	3,91	1400	51,9	65	150	26	0,785	**200 · 200 · 16**
4150	7,75	1050	3,90	1550	73,5					**18**
4540	7,72	1160	3,89	1690	100					**20**

1. 2. 3. 4. Tabel momen lembam I dari bagian badan dari profil baja

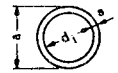
Momen lembam *I* pada badan dengan tebalnya *t* tidak ada dalam tabel berikut dapat kita menggunakan nilai *t* = 10 mm saja, yang dikalikan seperlunya.



$$I_x = \frac{t h^3}{12}$$

h	I_x (cm⁴) dengan *t* (mm):				*h*	I_x (cm⁴) dengan *t* (mm):			
mm	8	10	12	15	mm	8	10	12	15
50	8,33	10,4	12,5	15,6	500	8333	10417	12500	15625
60	14,4	18,0	21,6	27,0	550	11092	13865	16638	20797
70	22,9	28,6	34,3	42,9	600	14400	18000	21600	27000
80	34,1	42,7	51,2	64,0	650	18308	22885	27463	34328
90	48,6	60,8	72,9	91,1	700	22867	28583	34300	42875
100	66,7	83,3	100	125	750	28125	35156	42188	52734
110	88,7	111	133	166	800	34133	42667	51200	64000
120	115	144	173	216	850	40942	51177	61413	76766
130	147	183	220	275	900	48600	60750	72900	91125
140	183	229	274	343	950	57158	71448	85738	107172
150	225	281	338	422	1000	66667	83333	100000	125000
160	273	341	410	512	1050	77175	96469	115763	144704
170	328	409	491	614	1100	88733	110917	133100	166375
180	389	486	583	729	1150	101392	126740	152088	190109
190	457	572	686	857	1200	115200	144000	172800	216000
200	533	667	800	1000	1250	130208	162760	195313	244141
210	617	772	926	1158	1300	146467	183083	219700	274625
220	710	887	1065	1331	1350	164025	205031	246038	307547
230	811	1014	1217	1521	1400	182933	228667	274400	343000
240	922	1152	1382	1728	1450	203242	254052	304863	381078
250	1042	1302	1563	1954	1500	225000	281250	337500	421875
260	1172	1465	1758	2197	1550	248258	310323	372388	465484
270	1312	1640	1968	2460	1600	273066	341333	409600	512000
280	1463	1829	2195	2744	1650	299475	374344	449212	561516
290	1626	2032	2439	3048	1700	327534	409417	491300	614125
300	1800	2250	2700	3375	1750	357292	446615	535938	669922
310	1986	2483	2979	3724	1800	388800	486000	583200	729000
320	2185	2731	3277	4096	1850	422108	527635	633163	791453
330	2396	2995	3594	4492	1900	457266	571583	685900	857375
340	2620	3275	3930	4913	1950	494325	617906	741488	926859
350	2858	3573	4288	5359	2000	533334	666667	800000	1000000
360	3110	3888	4666	5832	2050	574342	717927	861513	1076890
370	3377	4221	5065	6332	2100	617400	771750	926100	1157625
380	3658	4573	5487	6859	2150	662558	828198	993838	1242297
390	3955	4943	5932	7415	2200	709867	887333	1064800	1331000
400	4267	5333	6400	8000	2250	795375	949219	1139062	1423828
425	5118	6397	7677	9596	2300	811133	1013917	1216700	1520875
450	6075	7594	9113	11391	2350	865192	1081490	1297788	1622234
475	7145	8931	10717	13396	2400	921600	1152000	1382400	1728000
					2450	980408	1225510	1470613	1838266
					2500	1041667	1302083	1562500	1953125

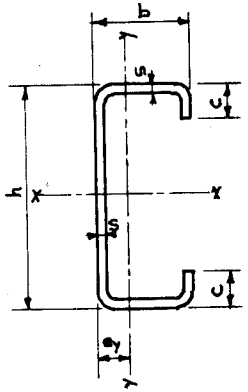
1. 2. 3. 5. Tabel nilai-nilai pipa air



inch	Ukuran dalam " a¹) mm	garis tengah luar d_j¹) mm	garis tengah dalam s mm	tebalnya dinding g²) kg/m	beratnya ter-masuk sambungan g²) kg/m	beratnya pipa saja F cm²	luasnya baja F_j cm²	luasnya isian pipa V_j dm³/m	volume/isian pipa O m²/m	luasnya pipa bagian luar I cm⁴	nilai-nilai statis W cm³	nilai-nilai statis i cm
1/8"	10,2	6,2	2	0,410	0,407	0,515	0,302	0,0302	0,0320	0,046	0,090	0,298
1/4"	13,6	8,9	2,35	0,654	0,650	0,831	0,622	0,0622	0,0427	0,137	0,202	0,406
3/8"	17,1	12,4	2,35	0,858	0,852	1,09	1,21	0,121	0,0537	0,304	0,355	0,528
1/2"	21,4	16,1	2,65	1,23	1,22	1,56	2,04	0,204	0,0672	0,700	0,654	0,669
3/4"	26,9	21,6	2,65	1,59	1,58	2,02	3,66	0,366	0,0845	1,50	1,12	0,862
1"	33,8	27,2	3,25	2,46	2,44	3,11	5,83	0,583	0,106	3,66	2,17	1,08
1 1/4"	42,4	36,0	3,25	3,17	3,14	4,00	10,2	1,02	0,133	7,74	3,65	1,39
1 1/2"	48,4	41,8	3,25	3,65	3,61	4,60	13,8	1,38	0,152	11,8	4,87	1,60
2"	60,2	53,0	3,65	5,17	5,10	6,49	22,0	2,20	0,189	26,1	8,66	2,01
2 1/2"	76,0	68,6	3,65	6,63	6,51	8,29	37,0	3,70	0,239	54,3	14,3	2,56
3"	88,8	80,6	4,05	8,64	8,47	10,8	51,1	5,11	0,279	96,9	21,8	3,00
4"	114	105	4,50	12,4	12,1	15,5	86,7	8,67	0,358	233	40,8	3,88
5"	140	130	4,85	16,7	16,2	20,5	133	13,3	0,439	467	66,9	4,77
6"	165	156	4,85	19,8	19,2	24,4	190	19,0	0,519	786	95,2	5,67

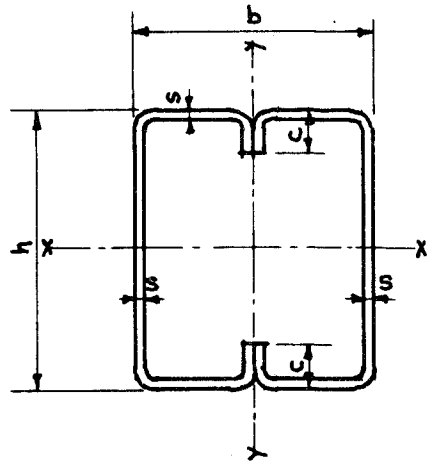
1. 2. 3. 6. Tabel besi beton

garis-tengah	berat	Banyaknya besi beton									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d mm	g kg/m	luasnya dalam cm² total									
5	0,154	0,196	0,393	0,589	0,785	0,982	1,18	1,37	1,57	1,77	1,964
6	0,222	0,283	0,565	0,848	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,827
7	0,302	0,385	0,770	1,15	1,54	1,92	2,31	2,69	3,08	3,46	3,848
8	0,395	0,503	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	5,027
9	0,499	0,636	1,27	1,91	2,54	3,18	3,82	4,45	5,09	5,73	6,362
10	0,617	0,785	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,854
12	0,888	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,2	11,31
14	1,21	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,8	12,3	13,9	15,39
16	1,58	2,01	4,02	6,03	8,04	10,1	12,1	14,1	16,1	18,1	20,11
18	2,00	2,54	5,09	7,63	10,2	12,7	15,3	17,8	20,4	22,9	25,45
20	2,47	3,14	6,28	9,42	12,6	15,7	18,8	22,0	25,1	28,3	31,42
22	2,98	3,80	7,60	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2	38,01
24	3,55	4,52	9,05	13,6	18,1	22,6	27,1	31,7	36,2	40,7	45,24
26	4,17	5,31	10,6	15,9	21,2	26,5	31,9	37,2	42,5	47,8	53,09
28	4,83	6,16	12,3	18,5	24,6	30,8	36,9	43,1	49,3	55,4	61,58
30	5,55	7,07	14,1	21,2	28,3	35,3	42,4	49,5	56,5	63,6	70,69
32	6,31	8,04	16,1	24,1	32,2	40,2	48,3	56,3	64,3	72,4	80,42
34	7,13	9,08	18,2	27,2	36,3	45,4	54,5	63,6	72,6	81,7	90,79
36	7,99	10,2	20,4	30,5	40,7	50,9	61,1	71,3	81,4	91,6	101,8
38	8,90	11,3	22,7	34,0	45,4	56,7	68,0	79,4	90,7	102	113,4
40	9,86	12,6	25,1	37,7	50,3	62,8	75,4	88,0	101	113	125,7

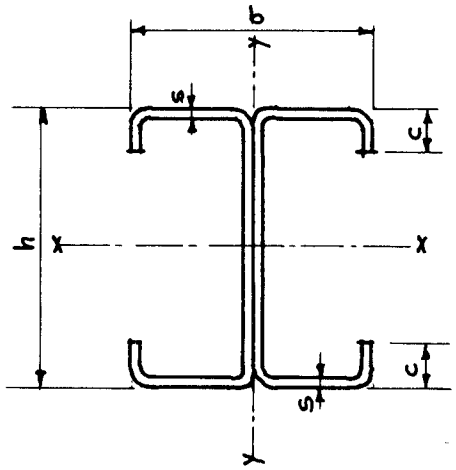


Ukuran-ukuran h mm	b mm	c mm	s mm	F cm²	berat g kg/m	s_y cm	garis sumbu x-x I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	garis sumbu y-y I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm
100	50	20	2.3	5.17	4.06	1.86	80.7	16.1	3.95	19.0	6.06	1.92
			3.2	7.01	5.50	1.86	107	21.3	3.90	24.5	7.81	1.87
			4.0	8.55	6.71	1.86	127	25.4	3.85	28.7	9.13	1.83
			4.5	9.47	7.43	1.86	135	27.7	3.82	30.9	9.82	1.81
125	50	20	2.3	5.75	4.51	1.69	137	21.9	4.88	20.6	6.22	1.89
			3.2	7.81	6.13	1.68	181	29.0	4.82	26.6	8.02	1.85
			4.0	9.55	7.50	1.68	217	34.7	4.77	33.1	9.38	1.81
			4.5	10.6	8.32	1.68	238	38.0	4.74	33.5	10.0	1.78
125	50	20	2.3	6.32	4.95	1.55	1379	21.9	4.88	20.6	6.22	1.89
			3.2	8.61	6.76	1.54	181	29.0	4.82	26.6	8.02	1.85
			4.0	9.55	7.50	1.86	217	34.7	4.77	33.1	9.38	1.81
			4.5	10.6	8.32	1.86	238	38.0	4.74	33.5	10.0	1.78
150	50	20	2.3	6.32	4.95	1.55	210	28.0	5.77	21.9	6.33	1.86
			3.2	8.61	6.76	1.54	280	37.4	5.71	28.3	8.19	1.81
			4.	11.7	9.20	1.54	368	49.0	5.60	35.7	10.5	1.75
150	65	20	2.3	7.01	5.50	2.12	248	33.0	5.94	41.1	9.37	2.42
			3.2	9.57	7.51	2.11	332	44.3	5.89	53.8	12.2	2.37
			4.0	11.8	9.22	2.11	401	53.5	5.84	63.7	14.5	2.32
150	75	20	3.2	10.2	8.01	2.51	336	48.9	5.99	76.4	15.3	2.74
			4.0	12.6	9.85	2.51	445	59.3	5.95	91.0	18.2	2.69
			4.5	14.0	11.0	2.50	489	65.2	5.92	99.2	19.8	2.66
150	75	25	3.2	10.5	8.27	2.66	375	50.0	5.97	83.6	17.3	2.82
			4.0	13.0	10.2	2.65	455	60.6	5.93	99.8	20.6	2.78
			4.5	14.4	11.3	2.65	501	66.9	5.90	109	22.5	2.75
200	75	20	3.2	11.8	9.27	2.19	716	71.6	7.79	84.1	15.8	2.67
			4.0	14.6	11.4	2.19	871	87.1	7.74	100	18.9	2.62
			4.5	16.2	12.7	2.19	963	96.3	7.71	109	20.6	2.60
200	75	25	3.2	12.1	9.52	2.33	736	73.6	7.80	92.3	17.8	2.76
			4.0	15.0	11.7	2.32	895	89.5	7.74	110	21.3	2.72
			4.5	16.7	13.1	2.32	990	99.0	7.61	121	23.3	2.69
250	75	25	4.5	18.9	14.9	2.07	1690	135	9.44	129	23.8	2.62

I. 2. 3. 8. Tabel nilai-nilai profil kanal C berkembar

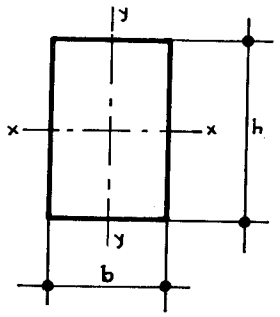


Ukuran-ukuran h mm	b mm	c mm	s mm	F cm²	berat g kg/m	garis sumbu x-x I_x cm⁴	W_x cm³	i cm	garis sumbu y-y I_y cm⁴	W_y cm³	i cm
100	x 100	x 20	2.3	10.34	8.12	161	32.2	3.95	140	28.0	3.68
			3.2	14.01	11.0	214	42.8	3.90	187	37.4	3.65
125	x 100	x 20	2.3	11.49	9.02	274	43.8	4.88	167	33.4	3.81
			3.2	15.60	12.3	362	58.0	4.82	255	45.0	3.38
150	x 130	x 20	2.3	14.02	11.0	496	66.1	5.94	351	54.0	5.00
			3.2	19.14	15.0	664	88.6	5.89	476	73.2	4.99
200	x 150	x 20	3.2	23.62	18.5	1432	143	7.79	834	111	5.94



Ukuran-ukuran h mm	b mm	c mm	s mm	F cm²	berat g kg/m	garis sumbu x-x I_x cm⁴	W_x cm³	i cm	garis sumbu y-y I_y cm⁴	W_y cm³	i cm
100	100	20	2.3	10.34	8.12	161	32.2	3.94	73.8	14.8	2.67
			3.2	14.01	11.0	214	42.8	3.91	97.5	19.4	2.64
125	100	20	2.3	11.49	9.02	274	43.8	4.88	74.1	14.9	2.55
			3.2	15.60	12.3	362	58.0	4.82	97.2	19.4	2.50
150	130	20	2.3	14.02	11.0	496	66.1	5.95	145	22.3	3.22
			3.2	19.14	15.0	664	88.6	5.89	193	29.7	3.18
200	150	20	3.2	23.62	18.5	1442	144	7.81	297	39.6	3.54

I. 2. 4. Tabel nilai-nilai balok kayu segi empat



Momen lembam $I_x = \frac{bh^3}{12}$

$I_y = \frac{hb^3}{12}$

Momen penahan $W_x = \frac{bh^2}{6}$

$W_y = \frac{hb^2}{6}$

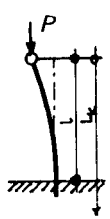
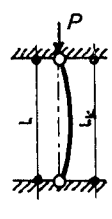
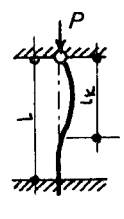
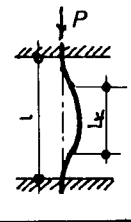
Jari-jari lembam $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = 0{,}289\ h$

$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = 0{,}289\ b$

b cm	h cm	F cm²	I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	V m³/m'
2.4	4.8	11.5	22.1	9.2	1.39	5.5	4.6	0.69	0.0012
3	5	15	31.3	12.5	1.45	11.3	7.5	0.87	0.0015
4	6	24	71	24	1.73	32	16	1.16	0.0024
4	8	32	169	42	2.31	43	21	1.16	0.0032
4	10	40	333	66	2.89	53	27	1.16	0.0040
4	12	48	570	95	3.47	64	32	1.16	0.0048
4	14	56	906	129	4.04	75	37	1.16	0.0056
4	16	64	1352	169	4.62	85	43	1.16	0.0064
4	18	72	1925	214	5.20	96	48	1.16	0.0072
5	8	40	213	53	2.31	83	33	1.44	0.0040
6	6	36	108	36	1.73	108	36	1,73	0,0036
6	8	48	256	64	2,31	144	48	1,73	0,0048
6	10	60	500	100	2,89	180	60	1,73	0,0060
6	12	72	864	144	3,46	216	72	1,73	0,0072
6	14	84	1372	196	4,04	252	84	1,73	0,0084
6	16	96	2048	256	4,62	288	96	1,73	0,0096
6	18	108	2916	324	5,20	324	108	1,73	0,0108
6	20	120	4000	400	5,77	360	120	1,73	0,0120
6	22	132	5324	484	6,35	396	132	1,73	0,0132
8	8	64	341	85	2,31	341	85	2,31	0,0064
8	10	80	666	133	2,89	426	106	2,31	0,0080
8	12	96	1152	192	3,46	512	128	2,31	0,0096
8	14	112	1829	261	4,04	597	149	2,31	0,0112
8	16	128	2730	341	4,62	682	170	2,31	0,0128
8	18	144	3888	432	5,20	768	192	2,31	0,0144
8	20	160	5333	533	5,77	853	213	2,31	0,0160
8	22	176	7098	645	6,35	938	234	2,31	0,0176
8	24	192	9216	768	6,93	1024	256	2,31	0,0192
10	10	100	833	166	2,89	833	166	2,89	0,0100
10	12	120	1440	240	3,46	1000	200	2,89	0,0120
10	14	140	2286	326	4,04	1166	233	2,89	0,0140
10	16	160	3413	426	4,62	1333	266	2,89	0,0160
10	18	180	4860	540	5,20	1500	300	2,89	0,0180
10	20	200	6666	666	5,77	1666	333	2,89	0,0200
10	22	220	8873	806	6,35	1833	366	2,89	0,0220
10	24	240	11520	960	6,93	2000	400	2,89	0,0240
10	26	260	14646	1126	7,51	2166	433	2,89	0,0260
10	28	280	18293	1306	8,08	2333	466	2,89	0,0280

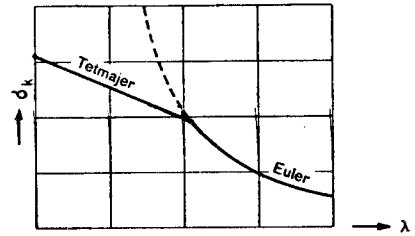
b cm	h cm	F cm2	I x cm4	W_x cm3	i_x cm	I y cm4	W_y cm3	i_y cm	V m3/m'
12	12	144	1728	288	3,46	1728	288	3,46	0,0144
12	14	168	2744	392	4,04	2016	336	3,46	0,0168
12	16	192	4096	512	4,62	2304	384	3,46	0,0192
12	18	216	5832	648	5,20	2592	432	3,46	0,0216
12	20	240	8000	800	5,77	2880	480	3,46	0,0240
12	22	264	10648	968	6,35	3168	528	3,46	0,0264
12	24	288	13824	1152	6,93	3456	576	3,46	0,0288
12	26	312	17576	1352	7,51	3744	624	3,46	0,0312
12	28	336	21952	1568	8,08	4032	672	3,46	0,0336
14	14	196	3201	457	4,04	3201	457	4,04	0,0196
14	16	224	4778	597	4,62	3658	522	4,04	0,0224
14	18	252	6804	756	5,20	4116	588	4,04	0,0252
14	20	280	9333	933	5,77	4573	653	4,04	0,0280
14	22	308	12422	1129	6,35	5030	718	4,04	0,0308
14	24	338	16128	1344	6,93	5488	784	4,04	0,0336
14	26	364	20505	1577	7,51	5945	849	4,04	0,0364
14	28	392	25610	1829	8,08	6402	914	4,04	0,0392
16	16	256	5461	682	4,62	5461	682	4,62	0,0256
16	18	288	7776	864	5,20	6144	768	4,62	0,0288
16	20	320	10666	1066	5,77	6826	853	4,62	0,0320
16	22	352	14197	1290	6,35	7509	838	4,62	0,0352
16	24	384	18432	1536	6,93	8192	1024	4,62	0,0384
16	26	416	23434	1802	7,51	8874	1109	4,62	0,0416
16	28	448	29269	2090	8,08	9557	1194	4,62	0,0448
18	18	324	8748	972	5,20	8748	972	5,20	0,0324
18	20	360	12000	1200	5,77	9720	1080	5,20	0,0360
18	22	396	15972	1452	6,35	10692	1188	5,20	0,0396
18	24	432	20736	1728	6,93	11664	1296	5,20	0,0432
18	26	468	26364	2028	7,51	12636	1404	5,20	0,0468
18	28	504	32928	2352	8,08	13608	1512	5,20	0,0504
20	20	400	13333	1333	5,77	13333	1333	5,77	0,0400
20	22	440	17746	1613	6,35	14666	1466	5,77	0,0440
20	24	480	23040	1920	6,93	16000	1600	5,77	0,0480
20	26	520	29293	2253	7,51	17333	1733	5,77	0,0520
20	28	560	36586	2613	8,08	18666	1866	5,77	0,0560
22	22	484	19521	1774	6,35	19521	1774	6,35	0,0484
22	24	528	25344	2112	6,93	21296	1936	6,35	0,0528
22	26	572	32222	2478	7,51	23070	2097	6,35	0,0572
22	28	616	40245	2874	8,08	24844	2258	6,35	0,0616
24	24	576	27648	2304	6,93	27648	2304	6,93	0,0576
24	26	624	35152	2704	7,51	29952	2496	6,93	0,0624
24	28	672	43904	3136	8,08	32256	2688	6,93	0,0672

I. 2.5. Tegangan tekuk yang diperkenankan untuk baja ST 37

Kondisi-kondisi tekuk				
l_k = panjang tekung menurut Euler =	2 l	l	0.7 l	0.5 l

$\lambda_{tk} = \frac{l_k}{i}$ = angka kelangsingan

Pada gaya batang *S* atas dasar beban tetap (induk) *H*

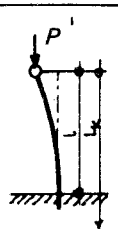
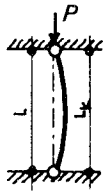
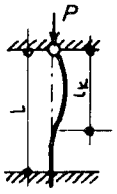
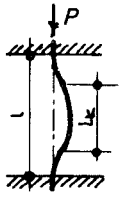


angka kelangsingan λ_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Tegangan yang diizinkan dalam kg/cm²									
10	1400	1400	1390	1380	1380	1370	1360	1350	1340	1340
20	1330	1320	1320	1310	1300	1290	1280	1280	1270	1260
30	1260	1250	1240	1230	1220	1220	1210	1200	1200	1190
40	1180	1170	1160	1160	1150	1140	1140	1130	120	1110
50	1100	1100	1090	1080	1080	1070	1060	1050	1040	1040
60	1030	1020	1020	1010	1000	992	985	977	1970	962
70	955	947	940	932	925	917	910	902	895	887
80	880	872	865	857	850	842	835	827	820	812
90	805	797	790	782	775	767	760	752	745	737
100	730	722	715	707	700	692	685	677	670	662
110	655	649	637	626	615	604	594	584	574	564
120	555	546	537	528	520	512	503	496	488	480
130	473	466	458	452	446	438	432	426	420	414
140	408	λ_k max pada jembatan kereta api								
140		402	397	391	386	380	375	370	365	360
150	355	351	346	341	337	333	329	324	320	316
160	312	λ_k max pada jembatan lalu lintas								
160		309	304	301	297	293	290	286	283	280
170	276	273	270	267	264	261	258	255	252	249
180	246	244	241	238	236	233	231	229	226	224
190	221	219	217	214	212	210	208	206	204	202
200	200	λ_k max pada bangunan								
200		198	196	194	192	190	188	186	185	183
210	181	179	178	176	174	173	171	169	168	166
220	165	163	162	160	159	158	156	155	153	152
230	151	150	148	147	146	145	143	142	141	140
240	138	137	136	135	134	133	132	131	130	129

Pada gaya batang S atas dasar beban tetap dan hidup (HZ)

angka kelangsingan λ_k	0	1*	2	3	4	5	6	7	8	9
	Tegangan yang diizinkan dalam kg/cm²									
10	1600	1590	1580	1570	1560	1550	1540	1540	1530	1520
20	1510	1500	1490	1480	1480	1470	1460	1450	1440	1430
30	1420	1420	1410	1400	1390	1380	1370	1370	1360	1350
40	1340	1330	1320	1310	1310	1300	1290	1280	1270	1260
50	1260	1250	1240	1230	1220	1210	1200	1200	1190	1180
60	1170	1160	1150	1140	1140	1130	1120	1110	1100	1090
70	1080	1080	1070	1060	1050	1040	1030	1030	1020	1010
80	1000	991	983	974	966	957	949	940	932	923
90	915	906	898	889	881	872	864	855	847	838
100	830	821	813	804	796	787	779	770	762	753
110	745	730	717	705	692	680	668	657	646	635
120	625	614	604	594	585	576	567	558	549	540
130	532	524	516	509	501	493	486	479	472	465
140	459	λ_k max pada jembatan kereta api								
140		453	447	440	434	428	422	416	410	405
150	400	395	389	384	379	374	370	365	360	356
160	351	λ_k max pada jembatan lalu lintas								
160		347	343	339	334	330	326	322	319	315
170	311	307	304	300	297	293	290	287	284	280
180	277	274	271	268	265	263	260	257	254	252
190	249	246	244	241	239	236	234	232	229	227
200	225	λ_k max pada bangunan								
200		223	220	218	216	214	212	210	208	206
210	204	202	200	198	196	194	192	191	189	187
220	185	184	182	181	179	177	176	174	173	171
230	170	168	167	165	164	162	161	160	158	157
240	156	154	153	152	151	149	148	147	146	145

I. 2. 6. Faktor tekuk dan tegangan tekuk yang diperkenankan untuk kayu

Kondisi-kondisi tekuk				
l_k = panjang tekung menurut Euler =	2 l	l	0.7 l	0.5 l

$\lambda_{tk} = \frac{l_k}{i}$ = angka kelangsingan

λ_{tk}	Faktor tekuk ω	Tegangan tekuk yang diperkenankan untuk kayu dengan kelas kuat: I kg/cm²	II kg/cm²	III kg/cm²	IV kg/cm²
0	1,00	130	85	60	45
1	1,01	129	84	60	45
2	1,01	128	84	59	45
3	1,02	127	83	59	44
4	1,03	126	83	58	44
5	1,03	126	82	58	44
6	1,04	125	82	58	43
7	1,05	124	81	57	43
8	1,06	123	80	57	43
9	1,06	122	80	57	43
10	1,07	121	79	56	42
11	1,08	120	79	56	42
12	1,09	119	78	55	41
13	1,09	119	78	55	41
14	1,10	118	77	55	41
15	1,11	117	77	54	41
16	1,12	116	76	54	40
17	1,13	115	75	53	40
18	1,14	114	75	53	40
19	1,15	113	74	52	39
20	1,15	113	74	52	39
21	1,16	112	73	52	39
22	1,17	111	73	51	38
23	1,18	110	72	51	38
24	1,19	109	71	50	38
25	1,20	108	71	50	38
26	1,21	107	70	50	37
27	1,22	107	70	49	37
28	1,23	106	69	49	37
29	1,24	105	69	48	36
30	1,25	104	68	48	36

λ_{tk}	Faktor tekuk ω	Tegangan tekuk yang diperkenankan untuk kayu dengan kelas kuat:			
		I kg/cm^2	II kg/cm^2	III kg/cm^2	IV kg/cm^2
31	1,26	103	67	48	36
32	1,27	102	67	47	35
33	1,28	102	66	47	35
34	1,29	101	66	47	35
35	1,30	100	65	46	35
36	1,32	99	64	46	34
37	1,33	98	64	45	34
38	1,34	97	63	45	34
39	1,35	96	63	44	33
40	1,36	95	62	44	33
41	1,38	94	62	44	33
42	1,39	94	61	43	32
43	1,40	93	61	43	32
44	1,42	92	60	42	32
45	1,43	91	59	42	31
46	1,44	90	59	42	31
47	1,46	89	58	41	31
48	1,47	88	58	41	31
49	1,49	87	57	40	30
50	1,50	86	57	40	30
51	1,52	85	56	39	30
52	1,53	85	56	39	29
53	1,55	84	55	39	29
54	1,56	83	55	38	29
55	1,58	82	54	38	28
56	1,60	81	53	38	28
57	1,61	81	53	37	28
58	1,63	80	52	37	28
59	1,65	79	52	36	27
60	1,67	78	51	36	27
61	1,69	77	50	36	27
62	1,70	77	50	35	26
63	1,72	76	49	35	26
64	1,74	75	49	35	26
65	1,76	74	48	34	26
66	1,79	73	48	34	25
67	1,81	72	47	33	25
68	1,83	71	46	33	25
69	1,85	70	46	32	24
70	1,87	70	45	32	24

λ_{tk}	Faktor tekuk ω	Tegangan tekuk yang diperkenankan untuk kayu dengan kelas kuat;			
		I kg/cm^2	II kg/cm^2	III kg/cm^2	IV kg/cm^2
71	1,90	69	45	32	24
72	1,92	68	44	31	23
73	1,95	67	44	31	23
74	1,97	66	43	30	23
75	2,00	65	43	30	23
76	2,03	64	42	30	22
77	2,05	63	42	29	22
78	2,08	63	41	29	22
79	2,11	62	40	28	21
80	2,14	61	40	28	21
81	2,17	60	39	28	21
82	2,21	59	39	27	20
83	2,24	58	38	27	20
84	2,27	57	37	26	20
85	2,31	56	37	26	20
86	2,34	56	36	26	19
87	2,38	55	36	25	19
88	2,42	54	35	25	19
89	2,46	53	35	24	18
90	2,50	52	34	24	18
91	2,54	51	33	24	18
92	2,58	50	33	23	17
93	2,63	49	32	22	17
94	2,68	49	32	22	17
95	2,73	48	31	22	17
96	2,78	47	31	22	16
97	2,83	46	30	21	16
98	2,88	45	30	21	16
99	2,94	44	29	20	15
100	3,00	43	28	20	15
101	3,07	42	28	20	15
102	3,14	41	27	19	14
103	3,21	41	26	19	14
104	3,28	40	26	18	14
105	3,35	39	25	18	13
106	3,43	38	25	18	13
107	3,50	37	24	17	13
108	3,57	36	24	17	13
109	3,65	36	23	16	12
110	3,73	35	23	16	12

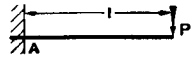
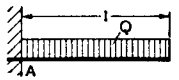
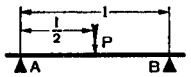
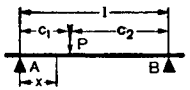
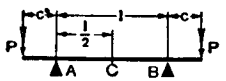
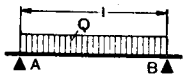
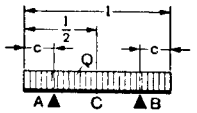
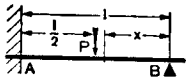
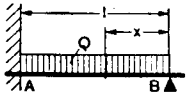
λ_{tk}	Faktor tekuk ω	Tegangan tekuk yang diperkenankan untuk kayu dengan kelas kuat:			
		I kg/cm²	II kg/cm²	III kg/cm²	IV kg/cm²
111	3,81	34	22	16	12
112	3,89	33	22	15	12
113	3,97	33	21	15	11
114	4,05	32	21	15	11
115	4,13	32	21	15	11
116	4,21	31	20	14	11
117	4,29	30	20	14	11
118	4,38	30	19	14	10
119	4,46	29	19	13	10
120	4,55	29	19	13	10
121	4,64	28	18	13	10
122	4,73	28	18	13	10
123	4,82	27	18	12	9
124	4,91	27	17	12	9
125	5,00	26	17	12	9
126	5,09	26	17	12	9
127	5,19	25	16	12	9
128	5,28	25	16	11	9
129	5,38	24	16	11	8
130	5,48	24	16	11	8
131	5,57	23	15	11	8
132	5,67	23	15	11	8
133	5,77	23	15	10	8
134	5,88	22	15	10	8
135	5,98	22	14	10	8
136	6,08	21	14	10	7
137	6,19	21	14	10	7
138	6,29	21	14	10	7
139	6,40	20	13	9	7
140	6,51	20	13	9	7
141	6,62	20	13	9	7
142	6,73	19	13	9	7
143	6,84	19	12	9	7
144	6,95	19	12	9	6
145	7,07	18	12	9	6
146	7,18	18	12	8	6
147	7,30	18	12	8	6
148	7,41	18	11	8	6
149	7,53	17	11	8	6
150	7,65	17	11	8	6

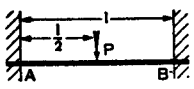
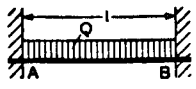
I. 2. 7. Penentuan tegangan σ_{max} pada konstruksi batang

Gaya luar seperti P dan Q diisi dalam t

Panjangnya l, ukuran c dan x, tingginya batang h dan lendutan f diisi dalam cm.

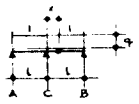
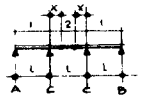
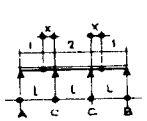
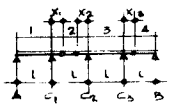
Tegangan σ_{lt} dan modul elastis E diisi dalam t/cm^2, (pada baja $E = 2'100\ t/cm^2$), momen lembam $I = cm^4$ dan momen tahanan $W = cm^3$

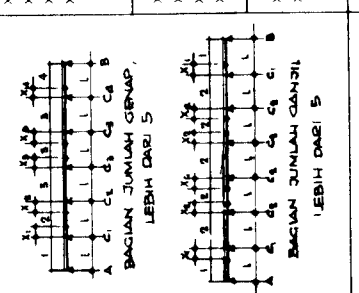
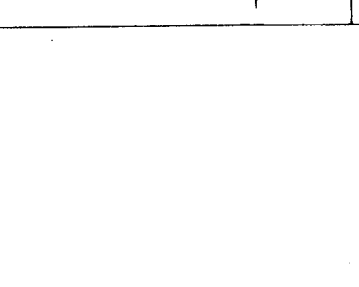
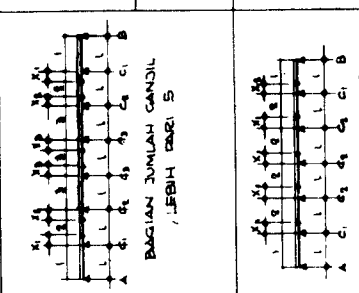
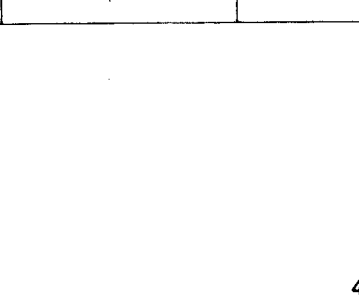
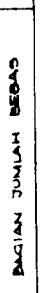
Beban	tegangan σ max	lendutan maksimal f
	$\frac{P\,l}{W}$	$\frac{P\,l^3}{3\,E\,I} = 3{,}17\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]
	$\frac{Q\,l}{2\,W}$	$\frac{Q\,l^3}{8\,E\,I} = 2{,}38\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]
	$\frac{P\,l}{4\,W}$	$\frac{P\,l^3}{48\,E\,I} = 0{,}794\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]
	pada: P $\frac{P\,c_1\,c_2}{l\,W}$	pada: $x = c_2\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2\,c_1}{3\,c_2}}$ kalau $c_1 < c_2$ $\frac{P\,c_1^2\,c_2^2}{3\,E\,I\,l} = 3{,}17\,\frac{\sigma max\,c_1\,c_2}{h}$ [1]
	$\frac{P\,c}{W}$	pada C $\frac{P\,l^2\,c}{8\,E\,I} = 1{,}19\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]; P $\frac{P\,c^2}{3\,E\,I}\left(c+\frac{3\,l}{2}\right) = 3{,}17\,\frac{\sigma max\,(c+1{,}5\,l)\,c}{h}$ [1]
	$\frac{Q\,l}{8\,W}$	$\frac{5\,Q\,l^3}{384\,E\,I} = 0{,}992\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]
	pada A, B $\frac{Q\,c_2}{2\,W\,l}$; C $\frac{Q}{2\,W}\left(\frac{l}{4}-c\right)$	pada C $\frac{Q\,l^3}{24\,E\,I}\left[\frac{5}{16}-\frac{5\,c}{2\,l}+6\left(\frac{c}{l}\right)^2-4\left(\frac{c}{l}\right)^3-\left(\frac{c}{l}\right)^4\right]$
	A=B=C kalau $c = 0{,}2071\,l$: $\approx \frac{Q\,l}{47\,W}$	C $\approx \frac{Q\,l^3}{1600\,E\,I} = 0{,}280\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]
	pada: A $\frac{3\,P\,l}{16\,W}$ A = 11 P/16; B = 5 P/16	pada: $x = 0{,}447\,l$ $\frac{P\,l^3}{48\sqrt{5}\,E\,I} = 0{,}473\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]
	pada: A $\frac{Q\,l}{8\,W}$ A = 5 Q/8; B = 3 Q/8	pada: $x = 0{,}4215\,l$ $\frac{Q\,l^3}{185\,E\,I} = 0{,}412\,\frac{\sigma max\,l^2}{h}$ [1]

	pada A, B, P	$\frac{P\,l}{8\,W}$	$\frac{P\,l^3}{192\,E\,I} = 0{,}397\,\frac{\sigma_{max}\,l^2}{h}$	[1]
	pada A, B	$\frac{Q\,l}{12\,W}$	$\frac{Q\,l^3}{384\,E\,I} = 0{,}298\,\frac{\sigma_{max}\,l^2}{h}$	[1]

[1]) pada nilai σ_{max} harus mengisi nilai *l*, *c* dan *x* dalam meter

I. 2. 8. Penentuan jarak engsel, reaksi tumpuan dan momen pada rusuk Gerber

Muatan	Jarak engsel	Tumpuan q = kg/m, L = m	Momen maksimal M = kgm, L = m	Momen lembam I untuk lendutan $f = \frac{l}{200}$ I = cm⁴, L = m
	$x = 0{,}1716 \cdot l$	$A = B = 0{,}4142 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}1716 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}79 \cdot M_1 \cdot l$
	$x = 0{,}22 \cdot l$	$A = B = 0{,}4142 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0392 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}79 \cdot M_1 \cdot l$
	$x = 0{,}125 \cdot l$	$A = B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_2 = 1{,}66 \cdot M_2 \cdot l$
	$x = 0{,}1716 \cdot l$	$A = B = 0{,}4142 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}0858 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0392 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$	$I_2 = 1{,}17 \cdot M_2 \cdot l$
	$x_1 = 0{,}2035 \cdot l$ $x_2 = 0{,}1570 \cdot l$ $x_3 = 0{,}1250 \cdot l$	$A = 0{,}4142 \cdot q \cdot l$ $C_1 = 1{,}1090 \cdot q \cdot l$ $C_2 = 0{,}9768 \cdot q \cdot l$ $C_3 = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$ $B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0511 \cdot q \cdot l^2$ $M_3 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_4 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c2-3} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}79 \cdot M_1 \cdot l$ $I_3 = 1{,}66 \cdot M_3 \cdot l$
	$x_1 = x_2 = 0{,}1465 \cdot l$ $x_3 = 0{,}1250 \cdot l$	$A = B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$ $C_1 = C_3 = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$ $C_2 = 1{,}0000 \cdot q \cdot l$	$M_1 = M_4 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = M_3 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1-3} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}90 \cdot M_1 \cdot l$ $I_3 = 1{,}66 \cdot M_3 \cdot l$

Muatan	Jarak engsel	Tumpuan q = kg/m, L = m	Momen maksimal M = kgm, L = m	Momen lembam I untuk lendutan $f = \frac{L}{200}$ I = cm⁴, L = m
	$x_1 = 0{,}2035 \cdot l$ $x_2 = 0{,}1570 \cdot l$ $x_3 = 0{,}1465 \cdot l$ $x_4 = 0{,}1250 \cdot l$	$A = 0{,}4142 \cdot q \cdot l$ $C_1 = 1{,}1090 \cdot q \cdot l$ $C_2 = 0{,}9768 \cdot q \cdot l$ $C_3 = 1{,}0000 \cdot q \cdot l$ $C_4 = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$ $B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0511 \cdot q \cdot l^2$ $M_3 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_4 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1} = -0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c2-4} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}79 \cdot M_1 \cdot l$ $I_3 = 1{,}66 \cdot M_3 \cdot l$
	$x_1 = x_2 = x_3 = 0{,}1465 \cdot l$ $x_4 = 0{,}1250 \cdot l$	$A = B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$ $C_1 = C_4 = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$ $C_2 = C_3 = 1{,}0000 \cdot q \cdot l$	$M_1 = M_4 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = M_3 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1-4} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}90 \cdot M_1 \cdot l$ $I_3 = 1{,}66 \cdot M_3 \cdot l$
	$x_1 = 0{,}1250 \cdot l$ $x_2 = 0{,}1465 \cdot l$	$A = B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$ $C_1 = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$ $C_2 = 1{,}0000 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1-2} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_2 = 1{,}66 \cdot M_2 \cdot l$
	$x_1 = 0{,}2035 \cdot l$ $x_2 = 0{,}1570 \cdot l$ $x_3 = 0{,}1465 \cdot l$	$A = B = 0{,}4142 \cdot q \cdot l$ $C_1 = 1{,}1090 \cdot q \cdot l$ $C_2 = 0{,}9768 \cdot q \cdot l$ $C_3 = 1{,}0000 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0511 \cdot q \cdot l^2$ $M_3 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1} = -0{,}0858 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c2-3} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}79 \cdot M_1 \cdot l$ $I_3 = 1{,}66 \cdot M_3 \cdot l$
	$x_1 = x_2 = x_3 = 0{,}1465 \cdot l$	$A = B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$ $C_1 = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$ $C_2 = 1{,}0000 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = M_3 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1-3} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}90 \cdot M_1 \cdot l$ $I_3 = 1{,}66 \cdot M_3 \cdot l$
	$x_1 = 0{,}1465 \cdot l$ $x_2 = 0{,}1250 \cdot l$	$A = B = 0{,}4375 \cdot q \cdot l$ $C_1 = 1{,}0625 \cdot q \cdot l$ $C_2 = 1{,}0000 \cdot q \cdot l$	$M_1 = +0{,}0957 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = +0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$ $M_{c1-2} = -0{,}0625 \cdot q \cdot l^2$	$I_1 = 1{,}90 \cdot M_1 \cdot l$ $I_2 = 1{,}66 \cdot M_2 \cdot l$

I. 2. 9. Nilai-nilai alat sambungan besi seperti keling, baut dan las

1. Penentuan garis tengah d dari keling atau baut menurut tebalnya t_{min} terkecil pada plat baja:

t	... 5	5 ... 8	7 ... 12	10 ... 14	12 ... 20	14 ... 20	18 ... 20
d	11	17	21	23	25	28	31

2. Daftar beban yang diperkenankan dalam kg per keling atau baut terhadap pergeseran (tampang satu, jikalau tampang dua boleh mengambil dua kali tampang satu):

pada bangunan dengan:	kg/cm²	Ø lobang (keling) dan Ø baut dalam mm						
		11 *M* 10	13 *M* 12	17 *M* 16	21 *M* 20	23 *M* 22	25 *M* 25	28 *M* 27
gaya batang *S* atas dasar beban tetap (induk) *H*	1400	1330	1858	3180	4850	5820	6870	8620
gaya batang *S* atas dasar beban tetap dan hidup angin dsb.) *HZ*	1600	1521	2120	3630	5540	6650	7850	9850

3. Daftar beban yang diperkenankan dalam kg per keling atau baut terhadap tekanan dinding lobang pada plat baja setebal 10 mm:

pada bangunan dengan:	kg/cm²	Ø lobang (keling) dan Ø baut dalam mm						
		11 *M* 10	13 *M* 12	17 *M* 16	21 *M* 20	23 *M* 22	25 *M* 24	28 *M* 27
gaya batang *S* atas dasar beban tetap (induk) *H*	2800	3080	3640	4760	5880	6440	7000	7840
gaya batang *S* atas dasar beban tetap dan hidup (angin dsb.) *HZ*	3200	3520	4160	5440	6720	7360	8000	8960

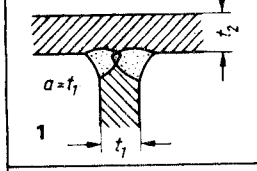
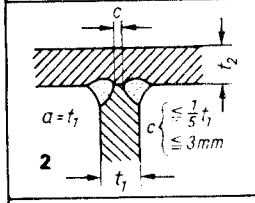
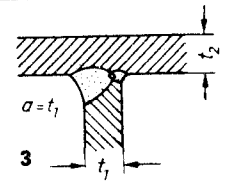
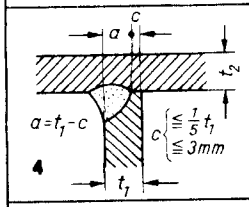
4. Daftar faktor reduksi f pada barisan-barisan baut atau keling:

banyaknya keling/baut yang maksimal pada baris dalam	satu baris	dua baris		tiga baris		empat baris	
n	f_1	f_{2v}	f_{2p}	f_{3v}	f_{3p}	f_{4v}	f_{4p}
2	1,000	1,000	0,500	0,500	0,3333	0,500	0,2500
3	1,000	0,800	0,500	0,444	0,3333	0,400	0,2500
4	0,900	0,643	0,450	0,375	0,3000	0,321	0,2250
5	0,800	0,533	0,400	0,320	0,2667	0,267	0,2000
6	0,714	0,455	0,357	0,278	0,2381	0,227	0,1786
7	0,643	0,396	0,321	0,245	0,2143	0,198	0,1607
8	0,583	0,350	0,292	0,219	0,1944	0,175	0,1458
9	0,533	0,314	0,267	0,198	0,1778	0,157	0,1333
10	0,491	0,284	0,246	0,180	0,1636	0,142	0,1227
11	0,485	0,260	0,227	0,165	0,1515	0,130	0,1139
12	0,423	0,239	0,212	0,153	0,1410	0,120	0,1058
13	0,398	0,222	0,198	0,142	0,1319	0,111	0,0989
14	0,371	0,208	0,186	0,133	0,1238	0,103	0,0929
15	0,350	0,193	0,175	0,124	0,1167	0,097	0,0875
16	0,331	0,181	0,165	0,117	0,1103	0,091	0,0827
17	0,314	0,171	0,157	0,111	0,1046	0,086	0,0784
18	0,298	0,162	0,149	0,105	0,0994	0,081	0,0746
19	0,284	0,154	0,142	0,100	0,0947	0,077	0,0711
20	0,271	0,146	0,136	0,095	0,0905	0,073	0,0679
21	0,260	0,139	0,130	0,091	0,0866	0,070	0,0650
22	0,249	0,133	0,125	0,087	0,0830	0,067	0,0623
23	0,239	0,128	0,120	0,083	0,0797	0,064	0,0598
24	0,230	0,122	0,115	0,080	0,0767	0,061	0,0575
25	0,222	0,118	0,111	0,077	0,0738	0,059	0,0554

5. Daftar batasan tegangan pada bahan baja:

Tegangan	Jenis baja	
	ST 37	ST 52
σ dan $\sqrt{\tau^2 + \tau_{ii}^2}$ masing-masing	950 kg/cm²	1200 kg/cm²
$\sigma + \sqrt{\tau^2 + \tau_{ii}^2}$	1350 kg/cm²	1700 kg/cm²

6. Daftar tegangan-tegangan yang diperbolehkan pada bahan baja:

Bentuk sambungan las	Jenis tegangan	Pada bahan baja ST 37 dan ST 52	
		gaya batang *S* atas dasar beban tetap (induk) *H*	gaya batang *S* atas dasar beban tetap dan hidup *HZ*
sambungan tumpul atau:  1	Tekanan dan tekanan lentur	ST 37 1600 kg/cm²	ST 37 1800 kg/cm²
		ST 52 2400 kg/cm²	ST 52 2700 kg/cm²
 2	Tarikan dan tarikan lentur siku dengan jurusan sambungan	ST 37 1600 kg/cm² *)	ST 37 1800 kg/cm² *)
		ST 52 2400 kg/cm² *)	ST 52 2700 kg/cm² *)
 3	Tarikan dan tarikan lentur siku dengan jurusan sambungan	ST 37 1350 kg/cm²	ST 37 1500 kg/cm²
		ST 52 1700 kg/cm²	ST 52 1900 kg/cm²
 4	Tekanan dan tekanan lentur, Tarikan dan tarikan lentur	ST 37 1350 kg/cm²	ST 37 1500 kg/cm²
		St 52 1700 kg/cm²	ST 52 1900 kg/cm²
Semua 5	Pergeseran	ST 37 1350 kg/cm²	ST 37 1500 kg/cm²
		ST 52 1700 kg/cm²	ST 52 1900 kg/cm²

*) Sambungan las sudut *K* bersela, jikalau mungkin diabaikan

I. 2. 10. Nilai-nilai alat sambungan kayu

1. Daftar beban yang diperkenankan per paku untuk kayu dengan berat jenis rata-rata 0,5 gr/cm³ kering udara:

Ukuran paku		2½" BWG 11	3"BWG 10	3½" BWG 9	4" BWG 8	4½" BWG 6	5" BWG 6
Paku garis tengah ø	mm	3.05	3.40	3.76	4.19	5.20	5.20
Panjangnya paku	mm	63	73	89	102	114	130
Dapat digunakan untuk papan tebalnya sampai	mm	20	25	30	35	40	40
Kekuatan 1 paku tampang satu	kg	31	40	50	61	94	94
tampang dua	kg	62	80	100	122	188	188
keperluan ukuran sambungan per paku min.	cm²	6.2	8.0	10.0	12.2	18.8	18.8
Jumlah paku kira-kira per kg paku	ptg	280	185	130	93	53	47

2. Daftar beban yang diperkenankan per baut untuk kayu dengan berat jenis rata-rata 0.5 gr/cm³ kering udara:

Baut garis tengah ø	mm	12 1/2"	14	16 5/8"	18	20 3/4"	22	25 1"
Garis tengah di dalam drat/snail	mm	9	10.5	12.5	14	16	18	20.5
Cincin minimum ø	mm	58	63	68	74	80	92	105
Cincin segiempat	mm	50/50	55/55	60/60	65/65	70/70	80/80	95/95
Cincin tebalnya	mm	5	5.5	6	7	8	8	8
Ukuran kayu minimal dengan satu barisan baut:								
Papan pengapit	cm	3.6/8	4.5/10	5/10	6/12	6/12	6/14	6/16
Kayu tengah	cm	8/8	10/10	10/10	12/12	12/12	14/14	16/16
Kekuatan 1 baut tampang satu $\varphi = 0°$	kg	308	384	463	544	626	711	856
Kekuatan 1 baut tampang dua $\varphi = 0°$	kg	615	768	925	1088	1253	1422	1713
$\varphi = 45°$	kg	538	672	809	952	1096	1244	1499
$\varphi = 90°$	kg	461	576	694	816	940	1067	1285
Kekuatan 1 baut untuk gaya tarik	kg	625	850	1200	1500	2000	2500	3200

3. Daftar beban yang diperkenankan per baut pasak khusus untuk kayu berat jenis rata-rata 0.5 gr/cm³ kering udara:

d	tampang dua dan lebih							
	pada batang tengah							
	tebal kayu a dalam cm							
mm	4	6	8	10	12	14	16	18
8	272	326	326	326	326	326	326	326
10	340	510	510	510	510	510	510	510
12	408	612	734	734	734	734	734	734
14	476	714	952	1000	1000	1000	1000	1000
16	544	816	1088	1306	1306	1306	1306	1306
18	612	918	1224	1530	1652	1652	1652	1652
20	680	1020	1360	1700	2040	2040	2040	2040
22	748	1122	1496	1870	2244	2468	2468	2468
24	816	1224	1632	2040	2448	2856	2938	2938
26	884	1326	1768	2210	2652	3094	3448	3448
28	952	1428	1904	2380	2856	3332	3808	3998
30	1020	1530	2040	2550	3060	3570	4080	4590

d	pada papan pengapit							
	tebal kayu a dalam cm							
mm	4	6	8	10	12	14	16	18
8	176	211	211	211	211	211	211	211
10	220	330	330	330	330	330	330	330
12	264	396	475	475	475	475	475	475
14	308	462	616	647	647	647	647	647
16	352	528	704	845	845	845	845	845
18	396	594	792	990	1069	1069	1069	1069
20	440	660	880	1100	1320	1320	1320	1320
22	484	726	968	1210	1452	1597	1597	1597
24	528	792	1056	1320	1584	1848	1901	1901
26	572	858	1144	1430	1716	2002	2231	2231
28	616	924	1232	1540	1848	2156	2464	2587
30	660	990	1320	1650	1980	2310	2640	2970

d	tampang satu							
	tebal kayu a dalam cm							
mm	4	6	8	10	12	14	16	18
8	128	147	147	147	147	147	147	147
10	160	230	230	230	230	230	230	230
12	192	288	331	331	331	331	331	331
14	224	336	448	450	450	450	450	450
16	256	384	512	589	589	589	589	589
18	288	432	576	720	745	745	745	745
20	320	480	640	800	920	920	920	920
22	352	528	704	880	1056	1113	1113	1113
24	384	576	768	960	1152	1325	1325	1325
26	416	624	832	1040	1248	1456	1555	1555
28	448	672	896	1120	1344	1568	1792	1803
30	480	720	960	1200	1440	1680	1920	2070

4. Daftar beban yang diperkenankan pada pasak cincin untuk kayu dengan berat jenis rata-rata 0.5 gr/cm^3 kering udara:

Pasak garis tengah ø									
ø luar Dl	mm	60	80	100	120	140	160	180	200
ø dalam Dd	mm	52	70	88	108	126	144	164	184
Pasak lebarnya b	mm	18	22	26	30	36	40	46	50
Baut pegang tengah ø	mm	12	14	14	16	16	18	18	20
Cincin segi empat	mm	50/50	60/60	60/60	70/70	70/70	70/70	70/70	80/80
Cincin tebalnya	mm	5	6	7	7	7	7	7	8
Ukuran kayu minimal:									
Papan pengapit									
φ = s/d 30°	cm	6/12	6/14	6/18	6/20	8/22	8/24	10/30	10/32
φ = lebih dari 30°	cm	6/10	6/12	6/14	6/16	8/18	6/20	8/24	8/26
Kayu tengah									
φ = s/d 30°	cm	8/12	8/14	8/18	8/20	10/22	10/24	10/30	10/32
φ = lebih dari 30°	cm	8/10	8/12	8/14	8/16	8/18	8/20	10/24	10/26
Jarak antara baut dan ujung kayu v (kayu muka)	cm	9	12	15	18	21	24	27	30
Jarak antara dua baut (tengah pasak)	cm	12	16	20	24	28	32	36	40
Jarak antara pinggir Pasak dan tepi kayu:									
yang dibebani a	cm	3	3	4	4	4	4	6	6
yang tidak dibebani b		2	2	2	2	2	2	3	3
Diperkecilnya luas kayu tanpa baut	cm^2	4.3	7.1	11.2	15.6	22.3	28.4	37.3	45.0
Kekuatan 1 pasak									
φ = 0°	kg	420	780	1140	1620	2260	2880	3780	4600
φ = 45°	kg	315	585	855	1215	1695	2160	2835	3450
φ = 90°	kg	210	390	570	810	1130	1440	1890	2300

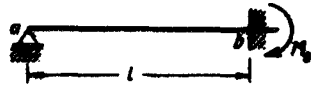
5. Daftar beban yang diperkenankan per Bulldog Connector untuk kayu dengan berat jenis rata-rata 0.5 gr/cm^3 kering udara:

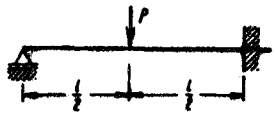
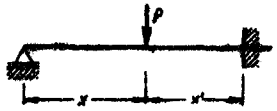
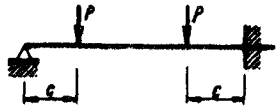
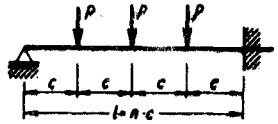
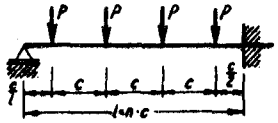
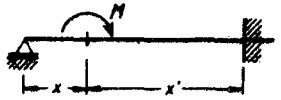
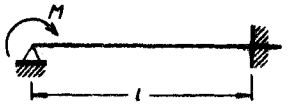
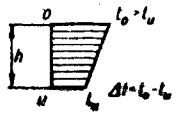
Bulldog|connector								
Garis tengah D	mm	50	62	75	95	117	140	165
Tingginya b	mm	10	17	19	25	30	31	33
Tebal seng s	mm	1.3	1.3	1.3	1.3	1.5	1.5	1.8
Baut pegang tengah	mm	12	16	16	16	20	20	25
Cincin segiempat	mm	50/50	60/60	70/70	70/70	80/80	90/90	100/100
Ukuran kayu minimal:								
φ = s/d 30°	cm	6/10	6/12	6/12	6/14	8/18	10/20	10/24
φ = lebih dari 30°		6/8	6/10	6/10	6/12	8/16	8/18	8/20
Jarak antara baut dan ujung kayu, dan antara dua baut	cm	12	12	14	14	17	20	23
Kekuatan 1 Bulldog								
φ = 0°	kg	350	550	750	1000	1350	1750	2400
φ = 45°	kg	300	475	650	875	1175	1525	2100
φ = 90°	kg	250	400	550	750	1000	1300	1800

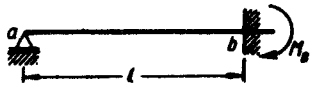
6. Daftar beban yang diperkenankan per plat paku-paku untuk kayu dengan berat jenis rata-rata 0.5 gr/cm^3 kering udara:

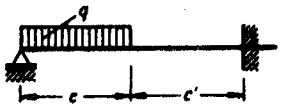
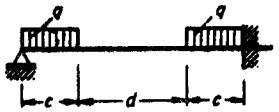
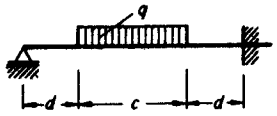
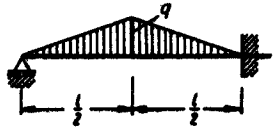
Pelat paku-paku lebarnya panjangnya	 cm cm	 1 1	 5 5	 5 10	 10 10
Keperluan tekanan untuk pasang	kg	50	1250	2500	5000
kekuatan terhadap pencabutan	kg	16	400	800	1600
Ukuran kayu minimal: tebalnya	 cm	 3	 3	 3	 3
Kekuatan tampang satu $\varphi = 0°$ $\varphi = 90°$	 kg kg	 10 7.5	 250 188	 500 375	 1000 750
Kekuatan tampang dua $\varphi = 0°$ $\varphi = 30°$ $\varphi = 60°$ $\varphi = 90°$	 kg kg kg kg	 20 18.5 17 15	 500 462 425 375	 1000 925 850 750	 2000 1850 1700 1500

I. 2. 11. 1. Tabel untuk menentukan jepitan pada balok terjepit sebelah

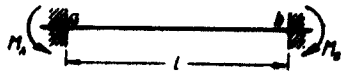


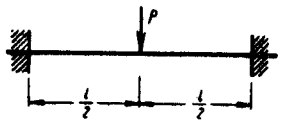
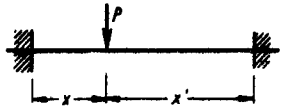
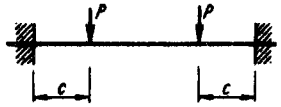
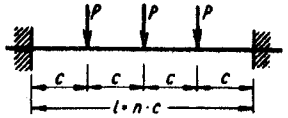
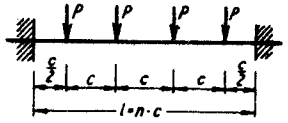
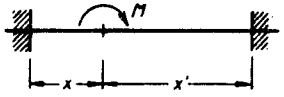
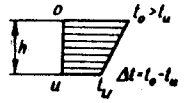
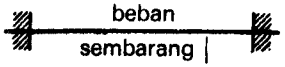
Beban	Momen jepitan
	$M_B = \frac{3}{16} Pl$
	$M_B = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) Pl$
	$M_B = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{c}{l}\right) Pc$
	$M_B = \frac{n^2 - 1}{8n} Pl$
	$M_B = \frac{n^2 + 0{,}5}{8n} Pl$
	$M_B = \frac{1}{2}\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right) M$
	$M_B = \frac{1}{2} M$
Perubahan suhu 	$M_B = -1{,}5\, EI \frac{\alpha_1 \Delta t}{h}$

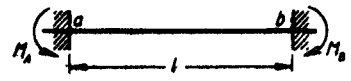


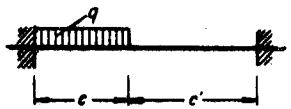
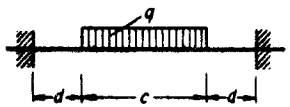
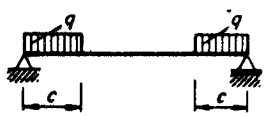
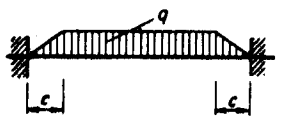
Beban	Momen jepitan
	$M_B = \frac{ql^2}{8}$
	$M_B = \frac{qc^2}{8}\left(2 - \frac{c^2}{l^2}\right)$
	$M_B = \frac{qc'^2}{8}\left(1 + \frac{c}{l}\right)^2$
	$M_B = \frac{qc^2}{4}\left(3 - 2\frac{c}{l}\right)$
	$M_B = \frac{qcl}{16}\left(3 - \frac{c^2}{l^2}\right)$
	$M_B = \frac{ql^2}{15}$
	$M_B = \frac{7}{120}\,ql^2$
	$M_B = \frac{5}{96}\,ql^2$

1. 2. 11. 2. Tabel untuk menentukan momen jepitan pada balok terjepit



Beban	Momen jepitan	
	$M_A = M_B = \frac{1}{8}\,Pl$	
	$M_A = \frac{Pxx'^2}{l^2}$	$M_B = \frac{Px^2x'}{l^2}$
	$M_A = M_B = Pc\left(1 - \frac{c}{l}\right)$	
	$M_A = M_B = \frac{n^2 + 0,5}{12\,n}\,Pl$	
	$M_A = M_B = \frac{n^2 - 1}{12\,n}\,Pl$	
	$M_A = \frac{Mx'}{l}\left(3\frac{x'}{l} - 2\right)$	$M_B = \frac{Mx}{l}\left(3\frac{x}{l} - 2\right)$
Perubahan suhu 	$M_A = M_B = -EI\frac{\alpha_t \Delta t}{h}$	
beban sembarang 	$M_A = \frac{1}{3}\,(2\mathfrak{L} - \mathfrak{R})$	$M_B = \frac{1}{3}\,(2\mathfrak{R} - \mathfrak{L})$



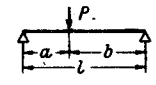
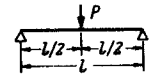
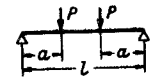
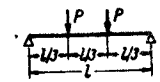
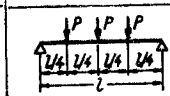
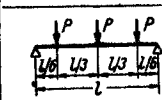
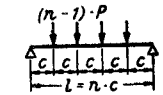
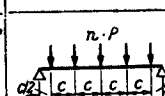
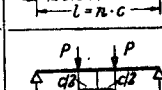
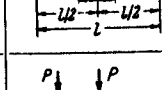
Beban	Momen jepitan
	$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$
	$M_A = \frac{qc^2}{12\,l^2}(6\,c'^2 + 4\,cc' + c^2)$ $M_B = \frac{qc^2}{12\,l^2}(4\,cc' + c^2)$
	$M_A = \frac{11}{192}\,ql^2$ $M_B = \frac{5}{192}\,ql^2$
	$M_A = M_B = \frac{qc^2}{24\,l}(3\,l^2 - c^2)$
	$M_A = M_B = \frac{qc^2}{6\,l}(3l - 2c)$
	$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}\left[1 - \frac{c^2}{l^2}\left(2 - \frac{c}{l}\right)\right]$
	$M_A = M_B = \frac{5}{96}\,ql^2$
	$M_A = \frac{ql^2}{30}$ $\quad M_B = \frac{ql^2}{20}$

I. 2. 12. Tabel-tabel untuk menentukan bagian beban pada syarat persamaan tiga momen (Clapeyron) dan luasnya bidang momen $\overline{M}$

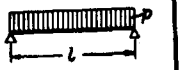
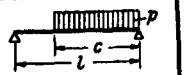
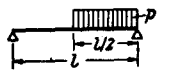
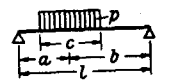
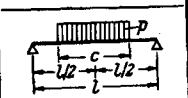
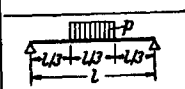
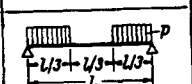
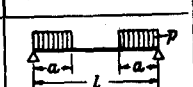
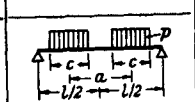
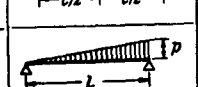
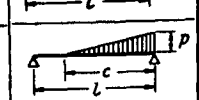
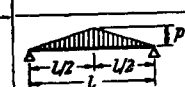
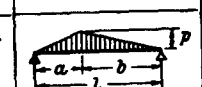
Persamaan tiga momen menurut Clapeyron:

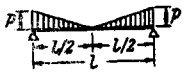
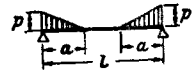
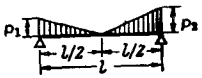
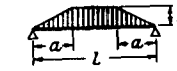
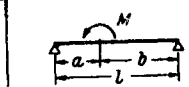
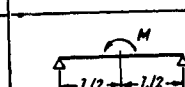
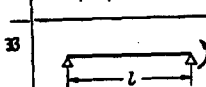
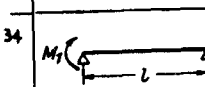
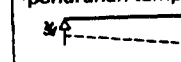
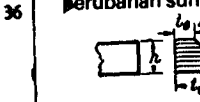
$$M_1 l_c + 2\,M_2\,(l_c + l'_c) + M_3\,l'_c = -\mathfrak{R}\cdot l_c - \mathfrak{L}\cdot l'_c$$

Bidang momen $\overline{M} = \int_0^l M_x \cdot x \cdot dx$

	Beban:	$\overline{M}$ [tm²]	$\mathfrak{L}$ [tm]	$\mathfrak{R}$ [tm]
1		$\frac{Pab}{2}$	$\frac{Pab}{l^2}(b + l)$	$\frac{Pab}{l^2}(a + l)$
2		$\frac{Pl^2}{8}$	$\frac{3}{8}Pl$	$\frac{3}{8}Pl$
3		$Pa\,(l - a)$	$\frac{3\,Pa}{l}(l - a)$	$\frac{3\,Pa}{l}(l - a)$
4		$\frac{2}{9}Pl^2$	$\frac{2}{3}Pl$	$\frac{2}{3}Pl$
5		$\frac{5}{16}Pl^2$	$\frac{15}{16}Pl$	$\frac{15}{16}Pl$
6		$\frac{19}{12}Pl^2$	$\frac{19}{24}Pl$	$\frac{19}{24}Pl$
7*		$\frac{Pl^2 n}{12}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$	$Pl\frac{n}{4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$	$Pl\frac{n}{4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
8*		$\frac{Pl^2 n}{12}\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)$	$Pl\frac{n}{4}\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)$	$Pl\frac{n}{4}\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)$
9		$\frac{P}{4}(l^2 - c^2)$	$\frac{3\,P}{4\,l}(l^2 - c^2)$	$\frac{3\,P}{4\,l}(l^2 - c^2)$
10		$P\left(ab - \frac{c^2}{4}\right)$	$\frac{2\,Pb}{l^2}\left(l^2 - b^2 - \frac{3}{4}c^2\right)$	$\frac{2\,Pa}{l^2}\left(l^2 - a^2 - \frac{3}{4}c^2\right)$

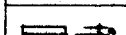
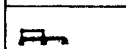
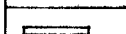
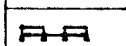
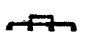
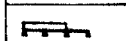
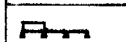
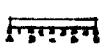
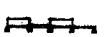
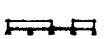
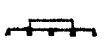
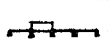
* hanya pada n = ganjil

	beban	$\bar{M}$ [tm²]	$\mathfrak{S}$ [tm]	$\mathfrak{R}$ [tm]
11		$p\,\frac{l^3}{12}$	$p\,\frac{l^2}{4}$	$p\,\frac{l^2}{4}$
12		$\frac{pc^2}{12}\,(3l-2c)$	$\frac{pc^2}{4l^2}\,(2l^2-c^2)$	$\frac{pc^2}{4l^2}\,(2l-c)^2$
13		$\frac{pl^3}{24}$	$\frac{7}{64}\,pl^2$	$\frac{9}{64}\,pl^2$
14		$\frac{pc}{24}\,(3ab-c^2)$	$\frac{pcb}{l^2}\left(l^2-b^2-\frac{c^2}{4}\right)$	$\frac{pca}{l^2}\left(l^2-a^2-\frac{c^2}{4}\right)$
15		$\frac{pc}{24}\,(3l^2-c^2)$	$\frac{pc}{8l}\,(3l^2-c^2)$	$\frac{pc}{8l}\,(3l^2-c^2)$
16		$\frac{13}{324}\,pl^3$	$\frac{13}{108}\,pl^2$	$\frac{13}{108}\,pl^2$
17		$\frac{7}{162}\,pl^3$	$\frac{7}{54}\,pl^2$	$\frac{7}{54}\,pl^2$
18		$\frac{pa^2}{6}\,(3l-2a)$	$\frac{pa^2}{2l}\,(3l-2a)$	$\frac{pa^2}{2l}\,(3l-2a)$
19		$\frac{pc}{12}\,[3\,(l^2-a^2)-c^2]$	$p\,\frac{c}{4l}\,[3\,(l^2-a^2)-c^2]$	$p\,\frac{c}{4l}\,[3\,(l^2-a^2)-c^2]$
20		$\frac{pl^3}{24}$	$\frac{7}{60}\,pl^2$	$\frac{8}{60}\,pl^2$
21		$\frac{pc^2}{24}\,(2l-c)$	$\frac{pc^2}{60l^2}\,(10l^2-3c^2)$	$\frac{pc^2}{60l^2}\,(20l^2-15lc+3c^2)$
22		$\frac{pc^2}{24}\,(4l-3c)$	$\frac{pc^2}{60l}\left(40l-45c+12\frac{c^2}{l}\right)$	$\frac{pc^2}{15l}\left(5l-3\,\frac{c^2}{l}\right)$
23		$\frac{5}{96}\,pl^2$	$\frac{5}{32}\,pl^2$	$\frac{5}{32}\,pl^2$
24		$\frac{pl}{24}\,(l^2+ab)$	$\frac{pl^2}{60}\left(1+\frac{b}{l}\right)\left(7-3\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{pl^2}{60}\left(1+\frac{a}{l}\right)\left(7-3\frac{a^2}{l^2}\right)$

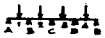
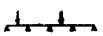
	beban:	$\bar{M}$ [tm³]	$\mathfrak{S}$ [tm]	$\mathfrak{R}$ [tm]
25		$\frac{pl^3}{32}$	$\frac{3}{32}\,pl^2$	$\frac{3}{32}\,pl^2$
26		$\frac{pa^3}{12}\,(2l-a)$	$\frac{pa^2}{4l}\,(2l-a)$	$\frac{pa^2}{4l}\,(2l-a)$
27		$\frac{l^3}{64}\,(p_1+p_2)$	$\frac{l^2}{960}\,(53\,p_1+37\,p_2)$	$\frac{l^2}{960}\,(37\,p_1+53\,p_2)$
28		$\frac{p}{12}\,(l^3-2la^2+a^3)$	$\frac{p}{4}\left(l^2-2a+\frac{a^3}{l}\right)$	$\frac{p}{4}\left(l^2-2a^2+\frac{a^3}{l}\right)$
29		$\frac{l^3}{24}\,(p_1+p_2)$	$\frac{l^2}{60}\,(8p_1+7p_2)$	$\frac{l^2}{60}\,(7p_1+8p_2)$
30		$\frac{pl^3}{15}$	$\frac{1}{5}\,pl^2$	$\frac{1}{5}\,2pl^2$
31		$\frac{M}{2}\,(a-b)$	$\frac{M}{l^2}\,(l^2-3b^2)$	$\frac{M}{l^2}\,(3a^2-l^2)$
32		0	$\frac{M}{4}$	$-\frac{M}{4}$
33		$\frac{1}{2}\,Ml$	M	$2M$
34		$\frac{1}{2}\,l\,(M_1+M_2)$	$2M_1+M_2$	M_1+2M_2
35	penurunan tumpuan 		$\frac{6EI}{l^2}\,(y_2-y_1)$	$-\frac{6EI}{l^2}\,(y_2-y_1)$
36	perubahan suhu 		$\frac{3EI\alpha_t\Delta t}{h}$	$\frac{3EI\alpha_t\Delta t}{h}$

I. 2. 13. Penentuan reaksi tumpuan dan momen pada balok terusan

1. Balok terusan dengan beban merata

Muatan	Momen max. = M q l²							Tumpuan = ... ql				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_B	M_C	M_D	A	B_{kiri} B_{kanan}	C_{kiri} C_{kanan}	D_{kiri} D_{kanan}	E
	0,0703	0,0703			− 0,1250			0,3750	0,6250 0,6250	0,3750		
	0,0867				− 0,0625			0,4375	0,5625 0,0625	− 0,0625		
	0,0800	0,0250	0,0800		− 0,1000	− 0,1000		0,4000	0,6000 0,5000	0,5000 0,6000	0,4000	
	0,1013		0,1013		− 0,0500	− 0,0500		0,4500	0,5500 0	0 0,5500	0,4500	
		0,0750			− 0,0500	− 0,0500		− 0,0500	0,0500 0,5000	0,5000 0,0500	− 0,0500	
	0,0736	0,0536			− 0,1167	− 0,0333		0,3833	0,6167 0,5834	0,4166 0,0333	− 0,0333	
	0,0939				− 0,0667	+ 0,0167		0,4333	0,5667 0,0834	− 0,0834 − 0,0167	0,0167	
	0,0772	0,0364	0,0364	0,0772	− 0,1071	− 0,0714	− 0,1071	0,3929	0,6071 0,5357	0,4643 0,4643	0,5357 0,6071	0,3929
	0,0996		0,0805		− 0,0536	− 0,0357	− 0,0536	0,4464	0,5536 0,0179	− 0,0179 0,4821	0,5179 0,0536	− 0,0536
	0,0720	0,0610		0,0977	− 0,1205	− 0,0179	− 0,0580	0,3795	0,6205 0,6026	0,3974 − 0,0401	0,0401 0,5580	0,4420
		0,0561	0,0561		− 0,0357	− 0,1072	− 0,0357	− 0,0357	0,0357 0,4285	0,5715 0,5715	0,4285 0,0357	− 0,0357
	0,0940				− 0,0665	+ 0,0179	− 0,0045	0,4335	0,5665 0,0844	− 0,0844 − 0,0224	0,0224 0,0045	− 0,0045
		0,0737			− 0,0491	− 0,0536	+ 0,0134	− 0,0491	0,0491 0,4955	0,5045 0,0670	− 0,0670 − 0,0134	0,0134

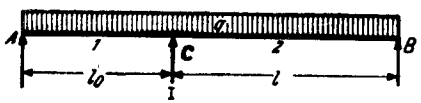
2. Balok terusan dengan gaya pusat

Muatan	Momen max. = M P l							Tumpuan = ... P				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_B	M_C	M_D	A	B_{kiri} B_{kanan}	C_{kiri} C_{kanan}	D_{kiri} D_{kanan}	E
	0,1562	0,1562			− 0,1875			0,3125	0,6875 0,6875	0,3125		
	0,2031				− 0,0938			0,4062	0,5938 0,0938	− 0,0938		
	0,1750	0,1000	0,1750		− 0,1500	− 0,1500		0,3500	0,6500 0,5000	0,5000 0,6500	0,3500	
	0,2125		0,2125		− 0,0750	− 0,0750		0,4250	0,5750 0	0 0,5750	0,4250	
		0,1750			− 0,0750	− 0,0750		− 0,0750	0,0750 0,5000	0,5000 0,0750	− 0,0750	
	0,1625	0,1375			− 0,1750	− 0,0500		0,3250	0,6750 0,6250	0,3750 0,0500	− 0,0500	
	0,2000				− 0,1000	+ 0,0250		0,4000	0,6000 0,1250	− 0,1250 − 0,0250	0,0250	
	0,1697	0,1161	0,1161	0,1697	− 0,1607	− 0,1071	− 0,1607	0,3393	0,6607 0,5536	0,4464 0,4464	0,5536 0,6607	0,3393
	0,2098		0,1830		− 0,0804	− 0,0536	− 0,0804	0,4196	0,5804 0,0268	− 0,0268 0,4732	0,5268 0,0804	− 0,0804
	0,1596	0,1462		0,2065	− 0,1808	− 0,0268	− 0,0871	0,3192	0,6808 0,6540	0,3460 − 0,0603	0,0603 0,5871	0,4129
		0,1428	0,1428		− 0,0536	− 0,1607	− 0,0536	− 0,0536	0,0536 0,3929	0,6071 0,6071	0,3929 0,0536	− 0,0536
	0,1998				− 0,1004	+ 0,0268	− 0,0067	0,3996	0,6004 0,1272	− 0,1272 − 0,0335	0,0335 0,0067	− 0,0067
		0,1730			− 0,0737	− 0,0804	+ 0,0201	− 0,0737	0,0737 0,4933	0,5067 0,1005	− 0,1005 − 0,0201	0,0201

3. Balok terusan dengan dua gaya yang simetris

Muatan	Momen max. = M P l							Tumpuan = ... P				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_B	M_C	M_D	A	B kiri B kanan	C kiri C kanan	D kiri D kanan	E
	0,2222	0,2222			− 0,3333			0,6667	1,3333 1,3333	0,6667		
	0,2778				− 0,1667			0,8333	1,1667 0,1667	− 0,1667		
	0,2444	0,0667	0,2444		− 0,2667	− 0,2667		0,7333	1,2667 1,0000	1,0000 1,2667	0,7333	
	0,2889		0,2889		− 0,1333	− 0,1333		0,8667	1,1333 0	0 1,1333	0,8667	
		0,2000			− 0,1333	− 0,1333		− 0,1333	0,1333 1,0000	1,0000 0,1333	− 0,1333	
	0,2296	0,2000			− 0,3111	− 0,0889		0,6889	1,3111 1,2222	0,7778 0,0889	− 0,0889	
	0,2740				− 0,1778	+ 0,0444		0,8222	1,1778 0,2222	− 0,2222 − 0,0444	0,0444	
	0,2381	0,1111	0,1111	0,2381	− 0,2857	− 0,1905	− 0,2857	0,7143	1,2857 1,0952	0,9048 0,9048	1,0952 1,2857	0,7143
	0,2857		0,2222		− 0,1429	− 0,0952	− 0,1429	0,8571	1,1429 0,0477	− 0,0477 0,9523	1,0477 0,1429	− 0,1429
	0,2262	0,1944		0,2817	− 0,3214	− 0,0476	− 0,1548	0,6786	1,3214 1,2738	0,7262 − 0,1072	0,1072 1,1548	0,8452
		0,1746	0,1746		− 0,0952	− 0,2857	− 0,0952	− 0,0952	0,0952 0,8095	1,1905 1,1905	0,8095 0,0952	− 0,0952
	0,2738				− 0,1786	+ 0,0476	− 0,0119	0,8214	1,1786 0,2262	− 0,2262 − 0,0595	0,0595 0,0119	− 0,0119
		0,1983			− 0,1310	− 0,1429	+ 0,0357	− 0,1310	0,1310 0,9881	1,0119 0,1786	− 0,1786 − 0,0357	0,0357

4. Balok terusan dengan beban merata dengan jarak tumpuan yang berlainan



perbandingan l_0/l	Reaksi tumpuan (kg)	Momen maksimal M (kgm)
0,4	$A = -0{,}0375 \cdot q \cdot l$ $B = 0{,}4050 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}0325 \cdot q \cdot l$	$M_1 \leqslant M_2$ $M_2 = 0{,}0820 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0950 \cdot q \cdot l^2$
0,5	$A = 0{,}0625 \cdot q \cdot l$ $B = 0{,}4063 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}0312 \cdot q \cdot l$	$M_1 = 0{,}00195 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = 0{,}0828 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0937 \cdot q \cdot l^2$
0,6	$A = 0{,}1420 \cdot q \cdot l$ $B = 0{,}4050 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}0530 \cdot q \cdot l$	$M_1 = 0{,}0101 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = 0{,}0820 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0950 \cdot q \cdot l^2$
0,7	$A = 0{,}2090 \cdot q \cdot l$ $B = 0{,}4010 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}0900 \cdot q \cdot l$	$M_1 = 0{,}0218 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = 0{,}0805 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}0990 \cdot q \cdot l^2$
0,8	$A = 0{,}2690 \cdot q \cdot l$ $B = 0{,}3950 \cdot q \cdot l$ $C = 1{,}1360 \cdot q \cdot l$	$M_1 = 0{,}0362 \cdot q \cdot l^2$ $M_2 = 0{,}0980 \cdot q \cdot l^2$ $M_c = -0{,}1050 \cdot q \cdot l^2$

I. 2. 14. Tabel-tabel hasil peng-integral-an pada kerja virtual

	Segiempat	Segitiga	Segitiga
Segiempat	sM_iM_k	$\frac{1}{2}sM_iM_k$	$\frac{1}{2}sM_iM_k$
Segitiga	$\frac{1}{2}sM_iM_k$	$\frac{1}{3}sM_iM_k$	$\frac{1}{6}s(1+\alpha)\,M_iM_k$
Segitiga	$\frac{1}{2}sM_iM_k$	$\frac{1}{6}sM_iM_k$	$\frac{1}{6}s(1+\beta)\,M_iM_k$
Segitiga	$\frac{1}{2}sM_iM_k$	$\frac{1}{6}s(1+\alpha)\,M_iM_k$	$\frac{1}{3}sM_iM_k$
Trapesium	$\frac{1}{2}s(M_{i_1}+M_{i_2})\,M_k$	$\frac{1}{6}s(M_{i_1}+2M_{i_2})\,M_k$	$\frac{1}{6}sM_k[(1+\beta)M_{i_1}+(1+\alpha)M_{i_2}]$
Parabel	$\frac{2}{3}sM_iM_k$	$\frac{5}{12}sM_iM_k$	$\frac{1}{12}s(5-\beta-\beta^2)\,M_iM_k$
Parabel	$\frac{2}{3}sM_iM_k$	$\frac{1}{4}sM_iM_k$	$\frac{1}{12}s(5-\alpha-\alpha^2)\,M_iM_k$
Parabel	$\frac{1}{3}sM_iM_k$	$\frac{1}{4}sM_iM_k$	$\frac{1}{12}s(1+\alpha+\alpha^2)\,M_iM_k$
Parabel	$\frac{1}{3}sM_iM_k$	$\frac{1}{12}sM_iM_k$	$\frac{1}{12}s(1+\beta+B^2)\,M_iM_k$
$\int M_kM_k ds$	sM_kM_k	$\frac{1}{3}sM_kM_k$	$\frac{1}{3}sM_kM_k$

Trapisium	Parabol	Parabol	Parabol
$\frac{1}{2}sM_i(M_{k_1}+M_{k_2})$	$\frac{2}{3}sM_iM_k$	$\frac{2}{3}sM_iM_k$	$\frac{1}{3}sM_iM_k$
$\frac{1}{6}sM_i(M_{k\,1}+2M_{k2})$	$\frac{1}{3}sM_iM_k$	$\frac{5}{12}sM_iM_k$	$\frac{1}{4}sM_iM_k$
$\frac{1}{6}sM_i(2M_{k1}+M_{k2})$	$\frac{1}{3}sM_iM_k$	$\frac{1}{4}sM_iM_k$	$\frac{1}{12}sM_iM_k$
$\frac{1}{6}sM_i[(1+\beta)M_{k1}+(1+\alpha)M_{k2}]$	$\frac{1}{3}s(1+\alpha\beta)M_iM_k$	$\frac{1}{12}s(5-\beta-\beta^2)M_iM_k$	$\frac{1}{12}s(1+\alpha+\alpha_2)sM_iM_k$
$\frac{1}{6}s(2sM_{i_1}M_{k1}+M_{i_1}M_{k2}+M_{i_2}M_{k1}+2M_{i_2}M_{k2})$	$\frac{1}{3}s(M_{i1}+M_{i2})\,M_k$	$\frac{1}{12}s(3M_{i1}+5M_{i2})\,Mk$	$\frac{1}{12}s(M_{i1}+3M_{i2})\,M_k$
$\frac{1}{12}sM_i\cdot(3M_{k1}+5M_{k2})$	$\frac{7}{15}sM_iM_k$	$\frac{8}{15}sM_iM_k$	$\frac{3}{10}sM_iM_k$
$\frac{1}{12}sM_i(5M_{k1}+3M_{k2})$	$\frac{7}{15}sM_iM_k$	$\frac{11}{30}sM_iM_k$	$\frac{2}{15}sM_iM_k$
$\frac{1}{12}sM_i(m_{k1}+3M_{k2})$	$\frac{1}{5}sM_iM_k$	$\frac{3}{10}sM_iM_k$	$\frac{1}{5}sM_iM_k$
$\frac{1}{12}sM_i(3M_{k1}+M_{k2})$	$\frac{1}{5}sM_iM_k$	$\frac{2}{5}sM_iM_k$	$\frac{1}{30}sM_iM_k$
$\frac{1}{3}s(M_{k1}^2+M_{k2}^2+M_{k1}M_{k2})$	$\frac{8}{15}sM_kM_k$	$\frac{8}{15}sM_kM_k$	$\frac{1}{5}sM_kM_k$

I. 3. Daftar kependekan

D — batang diagonal pada konstruksi rangka batang
E — modul elastis
F — gaya pengikat horisontal
G — modul pergeseran
H — gaya horisontal
penentuan beban atas dasar beban tetap (induk)
HZ — penentuan beban atas dasar beban tetap dan hidup (angin dsb.)
I — momen lembam
J — titik potong pada sistim titik potong
K — titik potong pada sistim titik potong
N — gaya normal
M — momen lentur, momen jepitan
O — batang tepi atas pada konstruksi rangka batang
P — gaya, gaya pusat, gaya tekan, gaya tarik
Q — gaya lintang
R — resultante
S — gaya batang pada konstruksi rangka batang
T — momen torsi
U — batang tepi bawah pada konstruksi rangka batang
V — gaya vertikal, batang vertikal pada konstruksi rangka batang
W — momen tahanan, bobot-beban
Z — momen sentrifugal

a — jarak titik potong J
b — jarak titik potong K
d — dalamnya gigi tunggal, garis tengah paku, baut, pasak dsb., suatu potongan yang sangat kecil, muatan gempa
f — lendutan
g — berat atau bobot sendiri
h — tingginya batang atau konstruksi rangka batang
i — besaran inti
k — angka kekakuan
l — panjangnya batang, lebar batang
q — beban merata, beban berguna
s — panjangnya batang pada konstruksi rangka batang
u — sistim koordinat terputar
v — sistim koordinat terputar
w — tekanan angin
x — koordinat yang horisontal
y — koordinat yang vertikal
lendutan ke samping pada tiang tekuk

Δ — delta — diferensi
Σ — sigma — jumlah

α — alpha — sudut putar tumpuan
β — beta — sudut putar tumpuan
γ — gamma — koefisien induksi
δ — delta — pergeseran
ukuran penurunan tumpuan
lendutan pada batang atau konstruksi rangka batang
ε — epsilon — ukuran jepitan, ukuran penguluran
η — eta — ordinat garis pengaruh
$\varkappa$ — kappa — faktor koreksi pada gaya lintang
λ — lambda — angka kelangsingan
jarak balok melintang pada beban yang tidak langsung
μ — my — koefisien distribusi
faktor pergoyangan
π — pi — faktor 3 . 14159
ϱ — rho — jari-jari lingkaran pada kerja virtual
σ — sigma — tegangan normal
τ — tau — tegangan geser
φ — phi — sudut antara dua batang
ψ — psi — sudut pada penentuan kerja virtual
ω — omega — faktor tekuk

1. 4. Daftar istilah penting

Alat sambungan, baja 203
—, kayu 226
Angka, kelangsingan 84
—, kekakuan k 291

Balok rusuk Gerber, 103,253
—, garis pengaruh 409
Balok terjepit, 102, 253
—, sebelah 263
—, elastis 265
Balok terusan, 103, 253
—, garis pengaruh 449
Balok tunggal, 102, 103
—, dengan gaya 103, 105
—, dengan beban merata 108, 110
—, dengan beban segitiga 113
—, dengan konsole 123, 407
—, bersudut 134, 143
—, dengan lengkungan miring 152
—, garis pengaruh 393
Batang dengan engsel pada ujungnya 290
Baut, 203, 230
—, pasak khusus 231
Beban, yang tetap 16
—, yang bergerak 16
—, berguna 16
—, yang berulang-ulang 79
Berat sendiri 16
Bernoulli, Jakob 59
Besaran inti 65
Betti (Syarat) 354
Bobot-beban W 372
Bulldog connector 237

Castigliano (Syarat) 356
Clapeyron, Syarat persamaan tiga momen 282
Cremona 183
Cross (lihat: Sistem Cross)
Culmann, Karl 176, 185

Distribusi momen, persiapan 292
—, menrut Cross 292, 304

Engesser 88
Euler, Leonhard 83

Gambar, situasi 23
—, gaya 23
Garis bersilang 268
Garis elastis, 96, 372
—, penentuan dengan bobot-beban W 374
—, pada konstruksi rangka batang 379
Garis kerja 21
Garis pengaruh, 389
—, penentuan 390
—, penggunaan 391
—, pada balok tunggal 393
—, pada reaksi tumpuan 393, 417, 452
—, pada gaya lintang 394, 419, 452
—, pada momen lentur 395, 418, 452
—, pada beban yang tidak langsung 396
—, pada lendutan 398
—, pada konsole 406
—, pada balok tunggal dengan konsole 407
—, pada balok rusuk Gerber 409
—, pada busur tiga ruas 415
—, pada gaya normal 419
—, pada konstruksi rangka batang 424
—, pada balok rerusan 449
—, pada reaksi tumpuan statis berlebih 450
—, penentuan secara grafis 452
Garis sumbu nol 61
Gaya, 20, 21
—, dengan titik tangkap bersama 23
—, yang sejajar 30
—, yang tidak sejajar 31
—, ganda 37
—, tarik 63
—, tekan 63
—, lintang 45
—, normal 44
—, dalam 43
—, torsi 72
—, yang berbahaya 83
—, pengikat horisontal 312, 325
Gerber, Heinrich 153
Gigi tunggal 226

Hetzer 239
Hook (Syarat) 20, 59

Inti, besaran 65

Jari-jari lembang 84
Jepitan, sendiri 271, 272
—, asing 271, 273

Keamanan 79
Keling 203
Kerja virtual, 343
—, hasil pengintegralan 351
Koefisien, distribusi 274
—, induksi 289
—, pergoyangan 322
Konsole, 102, 120
—, dengan gaya 120, 121
—, dengan beban merata 121
—, garis pengaruh 406
Konstruksi batang, 14, 101
—, pergeseran dan perputaran 359
Konstruksi berlapis majemuk dengan perekat 239
Konstruksi bingkai 15
Konstruksi busur tiga ruas 103, 160, 168, 415
Konstruksi parabol 109, 110
Konstruksi portal, tiga ruas 103, 160, 161
—, statis tidak tertentu 304
—, dengan titik simpul yang kaku 304
—, pertingkat 318, 332
—, dengan titik simpul yang goyah 322
Konstruksi rangka batang, 15, 176
—, pembangunan 178
—, kestabilan 180
—, bentuk 181
—, penentuan gaya batang 183
—, belah ketupat 188
—, berbentuk K 189
—, pergeseran 369
—, garis pengaruh 424
Konstruksi tangga 149

Lagrange (Asas tentang kerja virtual) 343
Las (sambungan), 207
—, sudut 207
—, tumpul 208
—, tepi 208
—, cekung 207
—, pipi 207
—, cembung 207
—, kepala 208
—, sela 208
Lendutan, 96, 262, 342
—, penentuan menerut Mohr 97

Maxwell (Syarat) 355
Modul elastis 59
Mohr, lingkaran 55, 75
—, penentuan lendutan 97
—, (Syarat) 81, 357, 372
Momen, 35
—, satu gaya 35
—, kumpulan gaya 35
—, lentur 45, 63
—, lembang 49, 50, 52
—, sentrifugal 49
—, tahanan 64
—, jepitan 287, 289
—, distribusi 289
—, koreksi pergoyangan 322
—, residu 288

Navier, Louis 59, 92

Paku 227
Pasak cincin 235
Pelat paku 235
Penurunan tumpuan pada balok terjepit 322
Perekat 239
Perjanjian tanda 44
Persamaan kerja, pada konstruksi batang 345
—, pada konstruksi rangka batang 350
Perubahan bentuk, 59
—, elastis 342, 354
Polygon batang tarik 26
Pytagoras (hukum) 22

Ritter, A., syarat persamaan momen 34
—, perhitungan gaya batang 186

Sifat-sifat bahan bangunan 19
Sistim Cross, pada balok terusan 286
—, perjanjian tanda 286
—, distribusi momen 292, 304
—, pada konstruksi portal, dengan titik simpul yang kaku 304
—, —, dengan titik simpul yang goyah 324
Sistim titik potong, 266, 453
—, jarak penting 270
—, pada balok terusan 274
—, penentuan secara analytis 275
—, penentuan secara grafis 277
Stegträger 239
Sudut putar tumpuan 255
Syarat, tangkai pengungkit 29, 119
—, keseimbangan 38, 40, 253
—, elastis 265
—, persamaan tiga momen (Clapeyron) 282
—, dari Betti 354
—, dari Maxwell 355

—, dari Castigliano 356
—, dari Mohr 357, 372

Tegangan, 20, 60
—, normal 57, 60
—, geser 58, 69, 72
—, linear 73
—, dalam bidang 76
—, las 208
Tekukan, 81, 87
—, ex-sentris 91, 93
Tetmajer, L. von 85
Tiang terbengkok, 91
—, dengan beban lintang 95
Titik berat 46
Titik patah (teori) 81
Titik simpul, macam-macam jepitan 271
—, momen 288
Topang ganda, 87
—, konstruksi baja 88
—, konstruksi kayu 90
Tumpuan, sendi 17
—, rol 17
—, jepitan 18, 87
—, engsel 87
—, perhitungan reaksi 40, 44

Urat nisbi 134

Williot (Diagram pergeseran) 379

I. 5. Pustaka

1. Bochmann, Fritz — *Statik im Bauwesen* Jilid 1, edisi ke-12, Berlin 1976; *Statik im Bauwesen* Jilid 2, edisi ke-9, Frankfurt/Basel 1976; *Statik im Bauwesen* Jilid 3, edisi ke-6, Frankfurt/Basel 1977
2. Darmawan, Loa W. — *Konstruksi Baja II* 2. revised edition, Bandung 1976
3. Dirdjosapoetro, Soad. — *Pengantar menghitung balok gelagar pada konstruksi bangunan,* edisi pertama, Jakarta 1972
4. Frick, Heinz — *Ilmu konstruksi kayu* edisi pertama, Yogyakarta 1977
5. Gattnar/Trysna — *Hölzerne Dach- und Hallenbauten* edisi ke-7, Berlin 1961
6. Harasim, Alfons — *Statik* edisi pertama, Würzburg 1970
7. Hempel, G. — *Freigespannte Holzbinder, Bau-Fachschriften No. 1* edisi ke-10, Karlsruhe 1973
8. Hirschfeld, Kurt — *Baustatik* edisi ke-2, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965
9. Hofsteede/Kramer/Soemargono — *Ilmu Mekanika Teknik* Jilid A, edisi ke-2, Jakarta 1976; *Ilmu Mekanika Teknik* Jilid B, edisi ke-3, Jakarta 1976
10. Hofsteede/Kramer/Baslim — *Ilmu Mekanika Teknik* Jilid C, edisi ke-2, Jakarta 1977
11. Hofsteede/Kramer/Zeiruddin — *Ilmu Mekanika Teknik* Jilid D, edisi ke-2, Jakarta 1977
12. Johannson, Johannes — *Das Cross-Verfahren* edisi ke-2, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955
13. Kaufmann, W. — *Statik der Tragwerke* edisi ke-4, Berlin 1957
14. Kirchhoff, R. — *Die Statik der Bauwerke* Jilid 1, edisi ke-6, 1960
15. Küderli + Co. — *Handbuch 1, Tabellen* edisi ke-2, 1963, Zürich, Basel

16. LIGNUM, Arbeitsgemeinschaft für das Holz
Dokumentation Holz
Jilid 2 dan 3 (hijau), Zürich 1960

17. Müller-Breslau, H.
Die graphische Statik der Baukonstruktionen
edisi ke-6, Leibzig 1927

18. Salinger, R.
Praktische Statik, Wien 1951

19. Soemono, R.
Statika 1
edisi pertama, Bandung 1977

20. Stüssi, F.
Baustatik I
edisi ke-3, Basel 1962

21. Wagner/Erlhof
Praktische Baustatik
Jilid 1, edisi ke-16, Stuttgart 1975
Praktische Baustatik
Jilid 2, edisi ke-12, Stuttgart 1977
Praktische Baustatik
Jilid 3, edisi ke-6, Stuttgart 1977

22. Wendehorst/Muth
Bautechnische Zahlentafeln
edisi ke-18, Stuttgart 1976

23. Yayasan Dana Normalisasi Indonesia
Peraturan Konstruksi Kayu Indonesia, NI-5
PKKI 1961, edisi ke-8, Bandung 1976
Peraturan Muatan Indonesia, NI-18
edisi ke-2, Bandung 1976

FUMIGASI
T. A.
1997 / 1998